Geometria
Harjoitus 6/2008

1. Olkoot $P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$ ja $R = tP + (1-t)Q$ jollekin $t \notin \{0, 1\}$. Osoita, että

(i) $\frac{PR}{RQ} = \frac{x_R - x_P}{x_Q - x_R}$ mikäli suora PQ ei ole y-akselin suuntainen;

(ii) $\frac{PR}{RQ} = \frac{y_R - y_P}{y_Q - y_R}$ mikäli suora PQ ei ole x-akselin suuntainen.

2. Olkoon ΔABC kolmio ja olkoon X piste, joka ei sijaitse millään suorista AB, BC ja CA. Olkoon edelleen P suorien AX ja BC leikkauspiste, Q suorien BX ja AC leikkauspiste sekä R suorien CX ja AB leikkauspiste.

(i) Määritä $\frac{CQ}{QA}$ kun tiedetään, että $\frac{AR}{RB} = \frac{1}{2}$ ja $\frac{BP}{PC} = -\frac{2}{7}$.

(ii) Määritä $\frac{BP}{PC}$ kun tiedetään, että $\frac{AR}{RB} = \frac{AQ}{QC} = \frac{3}{2}$.

Selvitä kummassakin tapauksessa onko X kolmion sisä- vai ulkopuolella.

3. Olkoon ΔABC kolmio, jonka kärkipisteet ovat $A = (-1, 1)$, $B = (2, -1)$ ja $C = (3, 2)$. Osoita, että pisteet $P = (\frac{8}{3}, 1)$, $Q = (2, \frac{7}{4})$ ja $R = (\frac{4}{5}, -\frac{1}{5})$ ovat sivuilla BC, CA ja AB (vastaavasti) ja tutki, onko suorilla AP, BQ ja CR yhteinen piste.

4. Todista Menalauksen lauseen avulla *käänteinen Menelauksen lause*: Olkoon ΔABC kolmio ja olkoot P, Q ja R kolme kärkipisteistä eroavaa pistettä suorilla BC, CA ja AB vastaavasti. Tällöin pisteet P, Q ja R ovat samalla suoralla mikäli

$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = -1.$$

5. Olkoon ΔABC kolmio, jonka kärkipisteet ovat $A = (2, 4)$, $B = (-2, 0)$ ja $C = (1, 0)$. Olkoot pisteet $P = (\frac{5}{2}, 0)$, $Q = (\frac{3}{2}, 2)$ ja $R = (1, 3)$ sivujen BC, CA ja AB pisteitä (vastaavasti). Tutki, ovatko pisteet P, Q ja R samalla suoralla.

6. Olkoon $a > 0$. Osoita, että parabelit $y^2 = 4ax$ ja $y = x^2$ ovat affiinisti kongruentit.

Huom! Harjoitus 6 pidetään pääsiäisen jälkeen torstaina 27.3.