

Geometria
Harjoitus 7/2008

1. Olkoon R suoran PQ piste, joka ei ole kumpikaan pisteistä P tai Q . Osoita, että merkillä varustetulle janalle pätee

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{P'R'}{R'Q'}$$

aina kun P', Q' ja R' ovat pisteiden P, Q ja R vastaavat kuvapistet affiinissa kuvauksessa.

2. Kartioleikkauskäyrän

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Fx + Gy + H = 0 \quad (1)$$

diskriminantti on luku $D := B^2 - 4AC$. Osoita, että hyperbelin $x^2 - y^2 = 1$ kuvakäyrä affiinissa kuvauksessa on muotoa (1) oleva kartioleikkauskäyrä, jonka diskriminantti on positiivinen.

3. Kolmion $\triangle ABC$ sisään piirretty ellipsi koskettaa kolmion sivuja AB, BC ja CA pisteissä R, P ja Q , vastaavasti. Osoita, että suorilla AP, BQ ja CR on yhteinen piste. [Vihje! Kuvaa ellipsi ympyrälle affiinilla kuvauksella ja hyödynnä Cevan lausetta kuvapuolella.]
4. Olkoon O ellipsin keskipiste ja oletetaan, että ellipsin pisteisiin A ja B piirretyt tangentit leikkaavat pisteessä T . Osoita, että suora OT puolittaa jänteen AB . [Vihje! Kuvaa ellipsi ympyrälle affiinilla kuvauksella ja tarkastele väitettä ensin kuvapuolella.]
5. Määrää suoran $x + y = 1$ kuvajoukko inversiossa yksikköympyrän $\mathcal{C}(0, 1)$ suhteen.
6. Määrää suoran $x = 2$ kuvajoukko inversiossa yksikköympyrän $\mathcal{C}(0, 1)$ suhteen.

Huom! Tehtävissä 3 ja 4 pidetään tunnettuna se, että annettu suora on annetun ellipsin tangentti jos ja vain jos suoralla ja ellipsillä on täsmälleen yksi yhteinen piste.