Geometria
Harjoitus 9/2008

1. Määrää kuvausyhtälöt inversiolle origokeskisen R-säteisen ympyrän suhteen. Määrää edelleen yhdistetty kuvaus $F_1 \circ F_2$, kun F_i on inversio origokeskisen R_i-säteisen ympyrän suhteen.

2. Todista seuraava Lauseen 3.4.9 osaväite: Olkoon $A \in \mathbf{R}^2$, $B = \infty$ ja C ympyrä, jonka suhteen A ja B ovat toistensa peilikuvia. Osoita, että jokainen pisteiden A ja B kautta kulkeva yleistetty ympyrä leikkaa C:n suorassa kulmassa.

3. Olkoon C_1 yleistetty ympyrä siten, että C_1 kuvautuu itselleen inversiossa yleistetyn ympyrän C suhteen. Osoita, että C ja C_1 leikkaavat kohtisuorasti.

4. Oletetaan, että ympyrät C_1 ja C_2 ovat ympyrän C_3 sisällä siten, että C_1 sivuaa ympyrää C_3 pisteessä P, C_2 sivuaa ympyrää C_3 pisteessä Q sekä C_1 ja C_2 sivuavat pisteessä R. Osoita, että pisteiden P, Q ja R kautta kulkeva ympyrä C leikkaa ympyrän C_3 suorassa kulmassa. [Vihje! Peilaa ympyrät C:n suhteen ja tutki ensin kuviin liittyvää vastaavaa väitettä.]

5. Olkoon $\mathcal{F}$ kaikkien niiden yleistettyjen ympyröiden perhe, joiden suhteen $A \in \mathbf{R}^2$ ja $B \in \mathbf{R}^2$ ovat toistensa inversiopisteitä. Osoita, että $\mathcal{F}$ on pisteisiin A ja B liittyvien Apolloniuksen ympyröiden perhe. [Vihje! Peilaa $\mathcal{F}$ A-keskisen 1-säteiden ympyrän suhteen ja käytä luentojen tuloksia hyväksi.]

6. Olkoon F peilaus suoran $x = 0$ suhteen ja G peilaus suoran $x = 1$ suhteen. Osoita, että yhdistetty kuvaus $F \circ G$ on siirto.

Huom! Harjoitus 9 pidetään torstaina 24.4.