Johdatus topologiaan
Kevät 2008
Harjoitus 1 (viikko 3)

1. Olkoon $f : M \to \mathbb{R}$ injektio ja $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$, kun $x, y \in M$. Onko d joukon M metriikka?

2. Olkoot $f(x,y) = |x^2 - y^2|$ ja $g(x,y) = |x^3 - y^3|$, kun $x, y \in \mathbb{R}$. Ovatko f ja g metriikkoja joukossa $\mathbb{R}$?

3. Olkoot d_1 ja d_2 metriikkoja joukossa M. Osoita, että kuvaukset

   (a) $d_1 + d_2 : (x,y) \mapsto d_1(x,y) + d_2(x,y)$,

   (b) $\max(d_1, d_2) : (x,y) \mapsto \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$

   ovat metriikkoja joukossa M.

4. Olkoon (M,d) metrinen avaruus, ja olkoon $x, y \in M$, $x \neq y$. Osoita, että on olemassa avoimet joukot $U \subset M$ ja $V \subset M$ siten, että $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ ja $y \in V$.

5. Olkoon (M,d) metrinen avaruus ja $x \in M$. Olkoon $0 < r < s$. Osoita, että joukko

   $$A = \{y \in M : r < d(x,y) < s\}$$

   on avoin.

   Huomautus. Joukkoa A kutsutaan avoimeksi ympyrärenkaaksi (open annulus).

6. Olkoon (M,d) metrinen avaruus ja $x \in M$. Osoita, että seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.

   (a) Piste x ei ole erillinen.

   (b) Pisteen x jokaisessa ympäristössä on äärettömän monta joukon M pistettä.

   Opastus: (a) $\Rightarrow$ (b) seuraa helpoiten osoittamalla, että väitteen (b) negaatiosta seuraa väitteen (a) negaatio.