Johdatus topologiaan
Kevät 2008
Harjoitus 2 (viikko 4)

1. Olkoon M joukko, ja olkoon $\{A_j\}_{j\in I}$ kokoelma sen osajoukkoja, missä I on mielivaltainen indeksijoukko. Osoita seuraavien väitteiden paikkansapitävyys.

   (a) $M \setminus \cup_{j\in I} A_j = \cap_{j\in I}(M \setminus A_j)$,

   (b) $M \setminus \cap_{j\in I} A_j = \cup_{j\in I}(M \setminus A_j)$.

2. Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Olkoon $\{x_n\}$ jono joukon M pisteitä, ja olkoon $x \in M$. Osoita, että $x_n \to x$ jos ja vain jos $d(x, x_n) \to 0$.

3. Osoita, että metrisen avaruuden suljettu pallo on suljettu joukko

   (a) Lauseen 3.4 avulla,

   (b) suljetun joukon määritelmän avulla.

4. Olkoon $B(x, r)$ erään metrisen avaruuden avoin pallo, $\overline{B}(x, r)$ vastaava suljettu pallo, ja $\overline{B(x, r)}$ ko. avoimen pallon sulkeuma. Osoita, että $\overline{B}(x, r) = \overline{B(x, r)}$.

5. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $x, y \in M$, $x \neq y$. Osoita, että on olemassa avoimet joukot $U \subset M$ ja $V \subset M$ siten, että $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$, $x \in U$ ja $y \in V$.

   Opastus: Kyseinen tulos on yleisempi kuin Harjoitusten 1 tehtävän 4 tulos. Tässä yhteydessä kannattaa käyttää tietoa, että avoimen pallon sulkeuma on sama kuin suljettu pallo, ks. Tehtävä 4 yllä.

6. Tarkastellaan reaalilukujen ja itseisarvon muodostamaa metristä avaruutta $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Olkoon $A =]0, 2]$ ja $U =]1, 2]$. Joukko U ei ole avoin eikä suljettu joukossa $\mathbb{R}$. Osoita, että joukko U on kuitenkin avoin joukossa A.