Johdatus topologiaan
Kevät 2008
Harjoitus 3 (viikko 5)

1. Olkoot X ja Y joukkoja, sekä $f : X \to Y$ kuvaus. Olkoon $\{A_j\}_{j\in I}$ kokoelma X:n osajoukkoja, missä I on mielivaltainen indeksijoukko. Osoita seuraavien väitteiden paikkansapitävyys.

   (a) $f\left(\cup_{j\in I} A_j\right) = \cup_{j\in I} f\left(A_j\right)$.

   (b) $f\left(\cap_{j\in I} A_j\right) \subset \cap_{j\in I} f\left(A_j\right)$.

   Huomautus. Käänteinen inkluusio kohdassa (b) ei ole voimassa. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, sekä joukkoja $A_1 = [-1, 0]$ ja $A_2 = [0, 1]$. Tällöin $f(A_1 \cap A_2) = f(\{0\}) = \{0\}$, mutta $f(A_1) \cap f(A_2) = [0, 1] \cap [0, 1] = [0, 1]$.

2. Olkoot X ja Y joukkoja, sekä $f : X \to Y$ kuvaus. Olkoon $\{B_j\}_{j\in I}$ kokoelma Y:n osajoukkoja, missä I on mielivaltainen indeksijoukko. Osoita seuraavien alkukuvajoukkoihin liittyvien väitteiden paikkansapitävyys.

   (a) $f^{-1}\left(\cup_{j\in I} B_j\right) = \cup_{j\in I} f^{-1}\left(B_j\right)$.

   (b) $f^{-1}\left(\cap_{j\in I} B_j\right) = \cap_{j\in I} f^{-1}\left(B_j\right)$.

   Opastus: Esimerkiksi joukon $B \subset Y$ alkukuvajoukko on

   $$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subset X.$$

3. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $a \in M$. Osoita, että funktio $f : M \to \mathbb{R}$, $f(x) = d(a, x)$, on jatkuva.

   Opastus: Osoita jatkuvuus pisteessä $x_0 \in M$ käyttämällä Lauseita 4.1 ja 5.2.

4. Olkoot (X, d_1) ja (Y, d_2) metrisiä avaruuksia, sekä $f : X \to Y$ kuvaus. Oletetaan, että on olemassa kokoelma $\{U_j\}_{j\in I}$ avoimia joukkoja X:ssä siten, että $X = \cup_{j\in I} U_j$ ja että f on jatkuva jokaisessa joukossa U_j. Osoita, että f on jatkuva joukossa X.

5. Olkoon $\{x_n\}$ jono metrisessä avaruudessa (M, d), ja olkoon $x_0 \in M$. Oletetaan, että jonon $\{x_n\}$ jokaisella osajonolla on edelleen osajono, joka suppenee kohti pistettä x_0. Osoita, että jono $\{x_n\}$ itse suppenee kohti pistettä x_0, eli että $x_n \to x_0$.

   Opastus: Tee vastaoletus, että $x_n \not\to x_0$.

6. Osoita, että Cauchyn jonon osajono on edelleen Cauchyn jono.

   Huomautus: Kyseistä tulosta sovellettiin sujuvasti Lauseen 6.10 todistuksessa.