Johdatus topologiaan
Kevät 2008
Harjoitus 4 (viikko 6)

1. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $A \subset M$. Osoita, että
$$\operatorname{diam}(A) = \operatorname{diam}(\overline{A}).$$
Opastus: Voit olettaa, että $A \neq \emptyset$. (Miksi?) Merkitään $a = \operatorname{diam}(A)$ ja $b = \operatorname{diam}(\overline{A})$. Epäyhtälö $a \leq b$ on triviaali. (Miksi?) Osoittaaksesi epäyhtälön $a \geq b$, tee vastaoletus, että $a < b$. Tällöin on olemassa $x, y \in \overline{A}$ siten, että $d(x, y) \geq \frac{a+b}{2}$. (Miksi?) Edelleen on olemassa jonot $\{x_n\}$ ja $\{y_n\}$ joukon A pisteitä siten, että $x_n \to x$ ja $y_n \to y$. (Miksi?) Nyt $a \geq d(x_n, y_n)$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. (Miksi?) Perustele Lausetta 4.1 käyttäen, kuinka tästä päädytään ristiriitaan.
Huomautus: Tehtävän tulosta käytettiin Lauseen 7.4 todistuksessa.

2. Olkoot A ja B metrisen avaruuden M osajoukkoja. Oletetaan, että A ja B ovat täydellisiä (indusoidun metriikan suhteen). Osoita, että $A \cap B$ on myös täydellinen.
Opastus: Katso Lause 7.6.

3. Oletetaan, että metrisen avaruuden M jokainen suljettu pallo on täydellinen. Osoita, että M itse on täydellinen.
Opastus: Lemman 6.8 nojalla jokainen Cauchyn jono voidaan sisällyttää johonkin suljettuun palloon.

4. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, on tasaisesti jatkuva
   (a) määritelmän avulla,
   (b) Esimerkin 8.4 avulla.

5. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $a \in M$. Määritellään kuvaus $f : M \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(x) = d(a, x)$. Osoita, että f on tasaisesti jatkuva.
Opastus: Lause 1.3.