Johdatus topologiaan
Kevät 2008
Harjoitus 5 (viikko 7)

1. Olkoon $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$. Osoita, että $(X, |\cdot|_X)$ on diskreetti.

   Opastus: Esimerkki 8.2.

2. Osoita, että reaalilukujen itseisarvo toteuttaa kolmioepäyhtälön.

3. Tason $\mathbb{R}^2$ standardi etäisyysfunktio d_1 määritellään seuraavasti: Jos $P = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ ja $Q = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, niin

   $$d_1(P, Q) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

   Geometrisesti ajatellen pisteet $P, Q \in \mathbb{R}^2$ ovat erään kolmion kärkipisteitä, jolla on koordinaattiakselien suuntaiset kateetit. Näiden kateettien pituudet ovat $|x_1 - x_2|$ ja $|y_1 - y_2|$, jolloin $d_1(P, Q)$ on Pythagoraan lauseesta saatava hypotenuusan pituus.

   Tasossa $\mathbb{R}^2$ voidaan määritellä myös muita etäisyysfunktioita, esim.

   $$d_2(P, Q) = \max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} \quad \text{ja} \quad d_3(P, Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

   Piirrä origokeskiset yksikköpallot $B_{d_j}(0, 1)$, $j = 1, 2, 3$.

4. Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Olkoot $A, B \subset M$ siten, että $A \subset B$. Osoita, että tällöin $\operatorname{Int}(A) \subset \operatorname{Int}(B)$.

5. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $A \subset M$. Osoita, että A on avoin jos ja vain jos $A \cap \operatorname{Bd}(A) = \emptyset$.

6. Osoita, että Tehtävän 3 metriikat d_2 ja d_3 ovat ekvivalentteja.

   Opastus: Luvuille $a, b \in \mathbb{R}$ on yleisesti voimassa

   $$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}\left(|a - b| + a + b\right).$$

   Jos nimittäin $\max\{a, b\} = a$, niin $|a - b| = a - b$, ja yhtälön oikea puoli redusoituu luvuksi a. Tapaus $\max\{a, b\} = b$ käsitellään vastaavasti.