**Johdatus topologiaan**
**Kevät 2008**
**Harjoitus 6 (viikko 8)**

1. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritellään pisteen $\overline{a}$ kautta kulkeva vektorin $\overline{v}$ suuntainen suora joukkona
$$\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \overline{x} = \overline{a} + t\overline{v},\ t \in \mathbb{R}\}.$$
Osoita, että yhtälöt
$$\overline{x} = (1, 2, -2, -5) + t(1, -1, 2, 1), \quad t \in \mathbb{R},$$
ja
$$\overline{x} = (2, 1, 0, -4) + t(-2, 2, -4, -2), \quad t \in \mathbb{R},$$
esittävät samaa suoraa avaruudessa $\mathbb{R}^4$.

2. Laske avaruudessa $\mathbb{R}^6$ suoran
$$\overline{x} = (1, 0, 0, 1, 2, 1) + t(-4, 2, 3, 1, -1, 2), \quad t \in \mathbb{R},$$
ja hypertason
$$2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 - x_6 = 3$$
leikkauspiste.

3. Olkoon $n \geq 2$, ja olkoon $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ vektori. Osoita, että on olemassa vektori $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$, $\overline{y} \neq \overline{0}$, siten, että $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0$.

4. Perustele, miksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukko
$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 1,\ x_2 = 2\}$$
ei ole avoin eikä suljettu.

5. Olkoon $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, ja olkoon $\{\overline{x}_k\}$ jono avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteitä siten, että $\overline{x} = \lim_{k \to \infty} \overline{x}_k$ ja että $\overline{x}_k \neq \overline{x}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Osoita, että piste $\overline{x}$ on joukon $A = \{\overline{x}_k : k \in \mathbb{N}\}$ kasaantumispiste.

6. Muodosta avaruuden $\mathbb{R}^2$ ääretön osajoukko, jolla ei ole yhtään kasaantumispistettä.