
Johdatus topologiaan
Kurssiin liittyvä loppukuulustelu
10.3.2008

Kukin seuraavista tehtävistä on viiden pisteen arvoinen.

1. Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Määritellään kuvaus $d_0 : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$d_0(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}.$$

Osoita, että d_0 on metriikka joukossa M .

2. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $x_0 \in M$. Osoita, että on olemassa jono $\{x_n\}$ joukon M pisteitä siten, että $x_n \rightarrow x_0$.

3. Määrittele seuraavat metriseen avaruuteen liittyvät käsitteet:

- (a) joukon halkaisija; (1,5 p.)
- (b) suljettu joukko; (1,5 p.)
- (c) Cauchyn jono. (2 p.)

4. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $A \subset M$. Osoita, että $\text{Int}(A)$ on avoin joukko. Tarkastele erikseen tapaukset $\text{Int}(A) = \emptyset$ ja $\text{Int}(A) \neq \emptyset$.

Opastus. Voit käyttää tietoa, että metrisen avaruuden avoin pallo on avoin joukko.

5. Piirrä tason \mathbb{R}^2 osajoukko

$$A = \overline{B}((0, 0), 1) \setminus \overline{B}((1, 0), 1),$$

kun tasoon on liitetty standardi etäisyys $\|\cdot\|$. Merkitse kuvaan joukon A sisäpisteet, reunapisteet ja ulkopisteet.