
Johdatus topologiaan

Kevät 2008

Syventäviä tehtäviä

1. Todista Lause 3.6(b).

2. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $x \in M$ ja $r > 0$. Osoita, että

$$\text{diam}(B(x, r)) = \text{diam}(\overline{B}(x, r)) \leq 2r.$$

3. Olkoon $M = [0, 2r[$, missä $r > 0$ on vakio. Osoita, että metrisessä avaruudessa $(M, |\cdot|_M)$ on olemassa r -säteisiä avoimia palloja, joiden halkaisijat ovat $< 2r$.

4. Olkoon $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Osoita, että

$$\text{diam}(B(\bar{x}, r)) = \text{diam}(\overline{B}(\bar{x}, r)) = 2r.$$

Opastus: Olkoot $\bar{y} = \bar{x} + (r - \frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0)$ ja $\bar{z} = \bar{x} + (-r + \frac{\varepsilon}{2}, 0, \dots, 0)$, missä $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen. Osoita, että $\bar{y}, \bar{z} \in B(\bar{x}, r)$, ja että $\|\bar{y} - \bar{z}\| = 2r - \varepsilon$. Tästä seuraa helposti, että $\text{diam}(B(\bar{x}, r)) \geq 2r$.

5. Oletetaan, että (X, \mathcal{T}) on kofiniittinen Hausdorff-avaruus. Osoita, että X on äärellinen joukko.