Algebra
Syksy 2008
Harjoitus 10

1. Olkoon G syklinen ryhmä ja N sen aliryhmä. Todista, että N on syklinen ja normaali aliryhmä.

   Opastusta. Mitä syklisistä ryhmistä todistettiin demoissa 7?

2. Onko ryhmän keskus (ks. tehtävä 3/demo 8) normaali aliryhmä?

3. Olkoon $G := \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ ja määritellään laskutoimitus $+$ joukossa $\mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_2$ seuraavasti:
$$(a, b) + (c, d) := (a +_6 c, b +_2 d).$$
   Silloin $(G, +)$ on ryhmä. Olkoon N syklinen aliryhmä $\langle(1, 1)\rangle$. Etsi tekijäryhmä G/N. Minkä tutun ryhmän kanssa tekijäryhmä G/N on isomorfinen?

   Vihje. Sivuluokkia on kaksi.

4. Olkoon $(H, \oplus)$ alkion $[3]$ virittämä jäännösluokkaryhmän $(\mathbb{Z}_6, \oplus)$ syklinen aliryhmä. Määrää tekijäryhmän $(\mathbb{Z}_6/H, \oplus)$ alkiot.

5. Määrää edellisen tehtävän tekijäryhmän laskutoimitustaulukko.

6. Olkoon $f : G \to G'$ ryhmähomomorfismi. Todista, että f on injektio jos ja vain jos sen ydin $\ker f = \{e\}$.

   Opastusta. Osoita, että $\{e\} \subseteq \ker f$ (helppo) ja $\ker f \subseteq \{e\}$ (ei vaikea). Toiseen suuntaan käytä homomorfisuutta.