

**Algebra**  
**Syksy 2008**  
**Harjoitus 11**

1. Todista Lause 9.11: Olkoon  $(R, +, \cdot)$  rengas ja  $0_R$  sen neutraali-alkio. Silloin kaikilla  $a \in R$  on  $0_R \cdot a = 0_R$  ja  $a \cdot 0_R = 0_R$ .
2. Olkoon  $(G, +)$  Abelin ryhmä, jonka nolla-alkio on 0. Määritellään  $x \cdot y = 0$  kaikilla  $x, y \in G$ . Onko  $(G, +, \cdot)$  rengas, kun joukossa  $G$  on vain yksi alkio?
3. Voidaan osoittaa, että joukko  $S = \{a, b, c, d\}$  muodostaa renkaan  $(S, +, \cdot)$ , kun laskutoimitukset  $+$  ja  $\cdot$  on määritelty seuraavien taulukoiden avulla.

$+$	$a$	$b$	$c$	$d$	$\cdot$	$a$	$b$	$c$	$d$
$a$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$a$	$a$	$a$	$a$
$b$	$b$	$c$	$d$	$a$	$b$	$a$	$c$	$a$	$c$
$c$	$c$	$d$	$a$	$b$	$c$	$a$	$a$	$a$	$a$
$d$	$d$	$a$	$b$	$c$	$d$	$a$	$c$	$a$	$c$

- a) Onko  $S$  vaihdannainen rengas?
  - b) Määrää  $0_S$ .
  - c) Määrää käänteisalkiot yhteenlaskun suhteen.
  - d) Onko rengas  $S$  ykkösellinen?
4. Määritellään joukossa  $\mathbb{Z}$  uusi kertolasku säännöllä  $a * b := 1$  kaikilla  $a, b \in \mathbb{Z}$ .
    - a) Muodostavatko  $\mathbb{Z}$ , tavallinen yhteenlasku ja tämä uusi kertolasku  $*$  renkaan?
    - b) Muodostavatko  $\mathbb{Z}$ , tavallinen yhteenlasku ja seuraava kertolasku:  $a \dagger b := 0$  kaikilla  $a, b \in \mathbb{Z}$ , renkaan?

*Opastusta.* Käy läpi renkaan aksioomat tarpeellisin osin:  $(\mathbb{Z}, +)$  on tunnetusti Abelin ryhmä, joten jäljelle jäävät kertolaskun ominaisuudet ja osittelulait.
  5. Ratkaise yhtälö  $x^2 + 2x + 4 = 0$  renkaassa  $\mathbb{Z}_6$ .
  6. Etsi kaikki renkaan  $\mathbb{Z}_{12}$  nollantekijät.