

Algebra
Syksy 2008
Harjoitus 12

1. Olkoon R rengas, ja olkoon $U(R)$ niiden renkaan R alkuiden joukko, joille on olemassa käänteisalkio renkaan kertolaskun \cdot suhteen. Mitä ovat $U(\mathbb{Z})$, $U(\mathbb{Z}_{12})$ ja $U(\mathbb{Z}_7)$?
2. Olkoon $(F, +, \cdot)$ kunta. Todista, että tällöin $(F \setminus \{0_F\}, \cdot)$ on Abelin ryhmä.
3. Olkoon $\mathbb{Z}[\sqrt{7}] := \{a + b\sqrt{7} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ on renkaan $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ alirengas.
4. Olkoon R kokonaisalue. Todista, että joukko

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} a & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in R \right\}$$

on matriisirenkaan $R^{2 \times 2}$ alirengas. Onko se kokonaisalue? Entä kunta?

5. Määrää

$$\frac{2}{3} +_7 \frac{4}{6}$$

kunnassa $(\mathbb{Z}_7, +_7, *_7)$.

6. Ratkaise yhtälöpari $2x+3y = 2$ ja $4x-3y = -3$ kunnassa $(\mathbb{Z}_{11}, +_{11}, *_{11})$.