Algebra
Syksy 2008
Harjoitus 13

1. Osoita, että renkaan $\mathbb{Z}_8$ niiden alkioiden, joilla ei ole käänteisalkioita, joukko muodostaa renkaan $\mathbb{Z}_8$ ideaalin.

2. Olkoot $(I_1, +, \cdot)$ ja $(I_2, +, \cdot)$ renkaan $(R, +, \cdot)$ ideaaleja.
   Osoita, että $(I_1 \cap I_2, +, \cdot)$ on renkaan $(R, +, \cdot)$ ideaali.

3. Lemmassa 10.20 määriteltiin alkion a virittämä ideaali, jota kutsutaan myös pääideaaliksi. Etsi kaikki pääideaalit renkaissa

   a) $\mathbb{Z}_5$,

   b) $\mathbb{Z}_{12}$.

4. Olkoon $I = \{0, 5\}$. Näytä, että I on renkaan $\mathbb{Z}_{10}$ ideaali. Muodosta tekijärengas $\mathbb{Z}_{10}/I$ ja sen laskutaulukot. Onko tekijärengas kokonaisalue tai kunta? Onko ideaali siis maksimaalinen?

5. a) Etsi kaikki maksimaaliset ideaalit renkaassa $\mathbb{Z}_6$.

   b) Näytä, että renkaalla $\mathbb{Z}_8$ on täsmälleen yksi maksimaalinen ideaali.

6. Ovatko seuraavat väitteet oikein vai väärin? Perustele lyhyesti tai etsi vastaesimerkki.

   a) $(\{0_R\}, +, \cdot)$ on renkaan $(R, +, \cdot)$ ideaali.

   b) Jokainen renkaan R ideaali on renkaan R alirengas.

   c) Jokainen renkaan R alirengas on myös renkaan R ideaali.

   d) $(\{0, 4, 8\}, +, \cdot)$ on renkaan $\mathbb{Z}_{12}$ maksimaalinen ideaali.

   e) Olkoon R ykkösellinen rengas ja I sen ideaali. Tällöin $1_{R/I} = 1_R$.