

**Algebra**  
**Syksy 2008**  
**Harjoitus 14**

1. Olkoon

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ja  $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ ,

$$f \left[ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \right] = a + bi.$$

Osoita, että  $f$  on rengashomomorfismi  $K \rightarrow \mathbb{C}$ .

2. Olkoon  $(R, +, \cdot)$  rengas ja  $f : R \rightarrow R$  rengashomomorfismi. Olkoon

$$A = \{a \in R \mid f(a) = a\}.$$

Näytä, että  $(A, +, \cdot)$  on renkaan  $(R, +, \cdot)$  alirengas.

3. Tutki onko kuvaus  $f : \mathbb{Z} \rightarrow 2\mathbb{Z}$ ,  $f(a) = 2a$  rengasisomorfismi renkaalta  $\mathbb{Z}$  renkaalle  $2\mathbb{Z}$ .

4. Näytä, että renkaat  $\mathbb{Z}_6$  ja  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$  ovat isomorfiset.

5. Sovella renkaan  $\mathbb{Q}[x]$  polynomeihin  $a(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1$  ja  $b(x) = x^2 - 2$  jakoalgoritmia ja määritä jakoyhtälön mukaiset polynomit  $q(x)$  ja  $r(x)$ .

6. Osoita, että  $x^2 - 2$  on jaoton renkaassa  $\mathbb{Q}[x]$ .