

Algebra Syksy 2008
Harjoitus 5 (vko 40)

1. Olkoon \circ laskutoimitus joukossa X ja \bullet laskutoimitus joukossa Y . Tällöin yhtälö

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) := (x_1 \circ x_2, y_1 \bullet y_2)$$

määrittelee laskutoimituksen karteesisessa tulossa $X \times Y$. Osoita, että $*$ on liitännäinen joukossa $X \times Y$, jos \circ on liitännäinen joukossa X ja \bullet on liitännäinen joukossa Y .

2. Olkoon $*$ rationaalilukujen joukon laskutoimitus, jolle $x * y = \frac{x+y-xy-2}{3}$. Onko $*$ liitännäinen, onko vaihdannainen? Onko sillä neutraalialkio? Löytyykö kaikille joukon \mathbb{Q} alkioille käänteisalkiot laskutoimituksen $*$ suhteen?
3. Tutki, ovatko seuraavat (joukko, laskutoimitus)-parit ryhmiä. Ilmoita kustakin neutraalialkio ja käänteisalkiot. Mikäli eivät ole ryhmiä, selitä miksi (vastaesimerkki!).
- a) Joukko $\{1, -1\}$ ja tavallinen kertolasku.
- b) Parillisten kokonaislukujen joukko $2\mathbb{Z}$ ja tavallinen yhteenlasku.
- c) $2\mathbb{Z}$ ja tavallinen kertolasku.
- d) \mathbb{R}^2 ja vektorien yhteenlasku.
4. Olkoon $A := \{a, b, c\}$, missä a, b ja c ovat kaikki eri alkioita. Mitkä ryhmän ominaisuudet ovat voimassa parille $(A, *)$, kun

	a)	b)	c)	d)	e)
$*$	$a \ b \ c$	$a \ b \ c$	$a \ b \ c$	$a \ b \ c$	$a \ b \ c$
a	$a \ b \ c$	$a \ a \ c$	$a \ a \ b \ 5$	$a \ b \ b \ b$	$a \ a \ b \ c$
b	$b \ a \ c$	$b \ b \ a \ c$	$b \ b \ a \ c$	$b \ b \ b \ b$	$b \ b \ c \ a$
c	$c \ a \ b$	$c \ c \ a \ b$	$c \ c \ a \ b$	$c \ b \ b \ b$	$c \ c \ a \ b$

5. Olkoot (G_1, \circ) ja (G_2, \bullet) ryhmiä. Olkoon $*$ joukon $G_1 \times G_2$ laskutoimitus,

$$(a_1, a_2) * (b_1, b_2) = (a_1 \circ b_1, a_2 \bullet b_2)$$

kaikilla $a_1, b_1 \in G_1$ ja $a_2, b_2 \in G_2$. Osoita $(G_1 \times G_2, *)$ ryhmäksi. (Huom! Liitännäisyyttä ei tarvitse osoittaa, vrt. tehtävä 1.)

6. Olkoon (G, \circ) ryhmä ja $*$ joukon G laskutoimitus

$$a * b := b \circ a$$

Totea $(G, *)$ ryhmäksi.