

Algebra  
Syksy 2008  
Harjoitus 6 (vko 41)

1. Laske

a)  $[2, 5, 3, 6, 1, 4]^{-1}$ ,

b)  $[2, 7, 5, 3, 8, 6, 1, 4]^{-1}$ .

2. Todista, että  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$  ja laskutoimitus  $*$ ,

$$(a, b) * (c, d) := (ac, bc + d)$$

muodostavat ryhmän. Onko se Abelin ryhmä?

3. Laske

a)  $5^{-3}$  ryhmässä  $(\mathbb{Z}_8, +_8)$ ,

b)  $[2, 3, 4, 1]^2$  ja  $[1, 3, 2, 4]^{-2}$  ryhmässä  $S_4$ ,

c)  $R_{270}^{-36}$  ryhmässä  $D_4$ .

4. Osoita, että ryhmässä on jokaisella yhtälöllä  $a \circ x = b$  tasan yksi ratkaisu.

*Opastus: Osoita, että ratkaisuja on ainakin yksi, ja toisaalta (vaikkapa supistussäännön avulla), että kahta eri ratkaisua ei ole.*

5. a) Ratkaise ryhmässä  $(\mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\}, *_13)$  yhtälö

$$x *_13 3 = 8.$$

b) Ratkaise ryhmässä  $(\mathbb{Z}_{27}, +_{27})$  yhtälö

$$23 = -_{27}(2x) +_{27} 24.$$

*Huomaa, että  $-_{27}(2x)$  tarkoittaa monikerran  $2x = x +_{27} x$  vasta-alkiota kyseisessä ryhmässä!*

6. Olkoon  $S := \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  ja  $a * b := a + b + ab$ .

a) Osoita, että  $*$  on laskutoimitus joukossa  $S$ .

b) Osoita, että  $(S, *)$  on ryhmä.

c) Ratkaise yhtälö  $2 * x * 3 = 7$  ryhmässä  $S$ .