

**Algebra**  
**Syksy 2008**  
**Harjoitus 7 (vko 42)**

1. Olkoot  $(G_1, \circ)$  ja  $(G_2, *)$  ryhmiä ja  $e_2 \in G_2$  neutraalialkio. Osoita, että kuvaus  $f : G_1 \rightarrow G_2$ ,  $f(x) = e_2$  on homomorfismi.
2. Osoita, että kuvaus  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$ , on homomorfismi ryhmältä  $(\mathbb{R}, +)$  ryhmälle  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ .
3. Olkoon  $(G, \circ)$  ryhmä ja olkoon  $(G, *)$  ryhmä, jonka laskutoimitus määritellään yhtälöllä

$$a * b = b \circ a$$

kaikilla  $a, b \in G$ . Osoita, että kuvaus  $f : G \rightarrow G$ ,  $f(x) = x^{-1}$  on isomorfismi ryhmältä  $(G, \circ)$  ryhmälle  $(G, *)$ .

4. Olkoot  $(H_1, \circ)$  ja  $(H_2, \circ)$  ryhmän  $(G, \circ)$  aliryhmiä. Osoita, että tällöin  $(H_1 \cap H_2, \circ)$  on ryhmän  $(G, \circ)$  aliryhmä.
5. Olkoon  $H = \{2^n 3^m | n, m \in \mathbb{Z}\}$ . Osoita, että  $(H, \cdot)$  on ryhmän  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  aliryhmä.
6. Mitkä seuraavista joukon  $\mathbb{Z}_{11}$  osajoukoista muodostavat ryhmän laskutoimituksen  $*_{11}$  suhteen?
  - a)  $\{1, 3, 4, 5, 9\}$ ,
  - b)  $\{1, 3, 4, 5, 8\}$ ,
  - c)  $\{1, 10\}$ .
7. Osoita, että jokainen syklinen ryhmä on Abelin ryhmä.

*Vihje:* Lause 4.4.