Algebra
Syksy 2008
Harjoitus 8

1. Olkoon $(G, \circ)$ ryhmä ja $a \in G$. Osoita, että alkion kertaluku on sama kuin sen virittämän aliryhmän kertaluku. (Muista käsitellä sekä ääretön että äärellinen kertaluku.)

2. Esitä alkion 3 virittämän ryhmän $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$ syklisen aliryhmän laskutoimitustaulukko.

3. Ryhmän G *keskus* (*center, zentrum*) on joukko

$$Z(G) := \{a \in G \mid a \circ g = g \circ a \text{ kaikilla } g \in G\}.$$

   Määritä seuraavien permutaatioryhmän $(S_4, \circ)$ aliryhmien keskukset:

   a) Kiertojen ryhmä $K_4 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}\}$.

   b) Symmetriaryhmä $D_4 = \{R_0, R_{90}, R_{180}, R_{270}, H, V, D, D'\}$.

4. Todista: Jos kaikkien ryhmän G alkioiden paitsi neutraalialkion kertaluku on 2, niin G on Abelin ryhmä.

5. Määritä osajoukon $\{-5, 55\}$ virittämä ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä H.

6. Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z}_{20}, +_{20})$. Määritä aliryhmään $\langle 10 \rangle$ liittyvät sivuluokat.