

---

**Analyysi I**  
**Syksy 2008**  
**Harjoitus 1 (viikko 37)**

---

1. Laske Peanon aksioomien avulla kertolasku  $3 \cdot 3$ .

*Opastus:* Katso mallia Esimerkin 1.2.3 laskusta.

2. Osoita induktiolla, että

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

on voimassa kaikilla  $n \in \mathbb{N}$ .

3. Olkoon  $n \in \mathbb{Z}$  siten, että  $n^2$  on pariton. Osoita epäsuoralla todistuksella, että  $n$  on pariton.

4. Olkoon  $x$  rationaaliluku ja  $y$  irrationaaliluku. Osoita epäsuoralla todistuksella, että summa  $x + y$  on irrationaaliluku.

*Opastus:* Voit käyttää hyväksesi tietoa, että yhteenlasku on laskutoimitus joukossa  $\mathbb{Q}$ , eli että kahden rationaaliluvun summa on rationaaliluku.

5. Olkoon  $a, x, y \in \mathbb{R}$  ja  $a \neq 0$ . Oletetaan, että  $ax = ay$ . Osoita kunta-aksiomien (A1)–(A9) avulla, että tällöin  $x = y$ .

*Opastus:* Kyseinen väite on Lause 1.6.2(b). Kannattaa lähteä liikkeelle väitetyn yhtälön  $x = y$  vasemmalta puolelta ja rakentaa aksioomien avulla tulo  $ax$ , johon voi soveltaa oletusta  $ax = ay$ . Eli:

$$x = 1 \cdot x = (a \cdot a^{-1})x = (a^{-1} \cdot a)x = a^{-1}(ax) = \dots$$

Perustele kukin yhtäsuuruus sopivalla aksioomanimellä ja jatka todistus loppuun.

6. Olkoot  $x, y \in \mathbb{R}$  siten, että  $x < y$ . Osoita kunta-aksiomien (A1)–(A9) ja järjestys-aksiomien (B1)–(B4) avulla, että tällöin  $-x > -y$ .

*Opastus:* Seuraavassa todistuksen alkua. Perustele kukin vaihe sopivalla aksioomanimellä ja jatka todistus loppuun.

$$\begin{aligned} x < y &\implies x + (-x) < y + (-x) \\ &\implies 0 < y + (-x) \\ &\implies 0 + (-y) < (y + (-x)) + (-y) \\ &\implies (-y) + 0 < ((-x) + y) + (-y) \\ &\implies \dots \end{aligned}$$