Analyysi I
Syksy 2008
Harjoitus 4 (viikko 40)

---

1. Olkoon $0 < x < 1$. Määrää raja-arvo
$$\lim_{n\to\infty} \frac{2x^n}{3x^n + x^{3n}}.$$
Opastus: Katso luentoesimerkkinä käsitelty geometrinen jono.

2. Todista Luvun 2.2 lauseiden avulla seuraava kuristusperiaatteen versio II.

   Oletetaan, että jonoille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on voimassa seuraavat ominaisuudet:

   (a) On olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $0 \leq |y_n| \leq x_n$ kaikilla $n \geq n_0$.

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

   Tällöin $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$.

3. Määritellään jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rekursiivisesti asettamalla
$$x_1 = 1 \quad \text{ja} \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$
   (a) Osoita suoralla laskulla, että jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on vähenevä.

   (b) Osoita induktiolla, että jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on alhaalta rajoitettu.

   Opastus: Jotta jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olisi hyvin määritelty, niin tulee luonnollisesti olla voimassa $x_n \neq -1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tätä ei suoranaisesti oleteta, mutta jonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ määrittelystä seuraa, että kaikki pisteet x_n ovat ei-negatiivisia. Tämän osoittaminen on tosin osa kohdan (b) ratkaisua.

4. Osoita, että Tehtävässä 3 määritelty jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suppenee, sekä määrää ko. jonon raja-arvo.

   Opastus: Tätä tehtävää ratkaistaessasi voit olettaa, että Tehtävä 3 on ratkaistu. Toisin sanoen, voit olettaa, että $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on vähenevä ja alhaalta rajoitettu.

5. Osoita Määritelmän 2.5.1 avulla, että
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 2}{n + 1} = \infty.$$
Opastus: Koska $\sqrt{2} \geq 1$, niin $\frac{n^2-2}{n+1} = \frac{(n-\sqrt{2})(n+\sqrt{2})}{n+1} \geq n - \sqrt{2}$ kaikilla $n \geq 2$.

6. Olkoot $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jonoja siten, että $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ja $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. Osoita Määritelmän 2.5.1 avulla, että
$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = +\infty.$$
Opastus: Olkoon $M > 0$. Oletusten nojalla on olemassa $n_1(M), n_2(M) \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n > \sqrt{M}$ kaikilla $n \geq n_1(M)$ ja $y_n > \sqrt{M}$ kaikilla $n \geq n_2(M)$.