

---

**Analyysi I**  
**Syksy 2008**  
**Harjoitus 5 (viikko 41)**

---

Tehtävissä 2, 3 ja 5 esiintyvät joukot  $A, B, C$  ovat reaalilukujoukon  $\mathbb{R}$  osajoukkoja.

1. Osoita Määritelmää 2.5.1 käyttäen seuraava kuristusperiaate.

Oletetaan, että jonoille  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ja  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on voimassa seuraavat ominaisuudet:

(a) On olemassa  $n_0 \in \mathbb{N}$  siten, että  $x_n \geq y_n$  kaikilla  $n \geq n_0$ .

(b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

Tällöin  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$ .

2. Olkoon  $f : A \rightarrow B$  aidosti vähenevä ja  $x, y \in A$ . Osoita, että

$$x < y \iff f(x) > f(y).$$

*Opastus:* Katso Lemman 3.1.3 todistus.

3. Olkoon  $f : A \rightarrow B$  aidosti vähenevä ja  $g : B \rightarrow C$  vähenevä. Mitä voit sanoa funktion  $g \circ f$  monotonisuudesta?

4. Osoita, että kuvaus  $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,

$$f(x) = \frac{1+x}{1-x},$$

on bijektio, sekä määrää käänteiskuvauksen  $f^{-1}$  lauseke.

5. Olkoon  $f : A \rightarrow B$  on aidosti vähenevä kuvaus. Osoita, että käänteiskuvaus  $f^{-1} : f(A) \rightarrow A$  on aidosti vähenevä.

*Opastus:* Kyseinen väite on Lause 3.3.2(b), jonka todistus sivuutettiin luennolla. Katso mallia Lauseen 3.3.2(a) todistuksesta.