
Analyysi I
Syksy 2008
Harjoitus 6 (viikko 42)

1. Osoita raja-arvon määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{x \rightarrow 3} (4x + 1) = 13.$$

2. Osoita raja-arvon määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{x \rightarrow -2} x^4 = 16.$$

3. Osoita raja-arvon määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4}.$$

Opastus: Kirjoita

$$\left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{4} \right| = \left| \frac{4 - x^2}{4x^2} \right| = \left| \frac{2 + x}{4x^2} \right| \cdot |2 - x|.$$

Jos $x \in B'(2, 1)$ (eli jos $1 < x < 3$ ja $x \neq 2$), niin

$$\left| \frac{2 + x}{4x^2} \right| = \frac{2 + x}{4x^2} \leq \frac{2 + 3}{4 \cdot 1^2} = \frac{5}{4}.$$

4. Laske raja-arvot

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 + \frac{1}{x^2}}, \quad (b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)}{x^2 - 1}.$$

5. Havainnollista toispuoleisen raja-arvon käsite (ks. Määritelmä 3.6.1) graafisesti.

Opastus: Piirrä kaksi kuvaa: vasemmanpuoleinen tapaus ja oikeanpuoleinen tapaus. Kummassakin kuvassa tulisi olla funktion f kuvaaja ja vakiot $\varepsilon, \delta, r, x_0, a$.