Analyysi I
Syksy 2008
Harjoitus 7 (viikko 43)

1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funktio

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \in \mathbb{Q}, \\ 1, & \text{kun } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Tutki, ovatko seuraavat raja-arvot olemassa:

   (a) $\lim_{x \to 0} x^2 f(x)$,

   (b) $\lim_{x \to 0} (x^2 + 1) f(x)$.

   Perustele väitteesi.

   Opastus: Luentoesimerkkinä osoitettiin, että yllä määritellyllä funktiolla f ei ole raja-arvoa missään pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$. Tämä yksinään ei tosin sulje pois sitä vaihtoehtoa, etteikö ainakin toinen kohtien (a) ja (b) raja-arvoista olisi olemassa.

2. Olkoon $f : B'(0,1) \to \mathbb{R}$ funktio siten, että $|f(x)| \leq |x|$, kun $x \in B'(0,1)$. Mitä voidaan sanoa raja-arvoista

   (a) $\lim_{x \to 0} f(x)$, (b) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$?

   Opastus: Käsittele tapaukset $f(x) = x$, $f(x) = x^2$ ja $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ kohdassa (b). Luentorungon sivun 33 huomautuksessa osoitetaan, että funktiolla $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ ei ole raja-arvoa origossa.

3. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & \text{kun } x < -1, \\ a - x^3, & \text{kun } x > -1. \end{cases}$$

   Millä vakion a arvoilla voidaan $f(-1)$ määritellä siten, että funktiosta f tulee jatkuva joukossa $\mathbb{R}$? Miten $f(-1)$ on määriteltävä?

4. Osoita Bolzanon lauseen avulla, että yhtälöllä

$$x^4 - 2x^3 + 4x - 4 = 0$$

   on ainakin kaksi reaalista ratkaisua.

5. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaus $f(x) = x^{17} - 4x^3 - 1$. Osoita Bolzanon lauseen II avulla, että on olemassa piste $c \in \mathbb{R}$ siten, että $f(c) = -2$.

   Huomautus: Yhtälö $f(c) = -2$ on ekvivalentti yhtälön $c^{17} - 4c^3 + 1 = 0$ kanssa. Tehtävän tulos siis osoittaa, että yhtälöllä $x^{17} - 4x^3 + 1 = 0$ on ainakin yksi reaalinen juuri, joka siis sijaitsee pisteessä $x = c$.