Analyysi I
Syksy 2008
Harjoitus 8 (viikko 44)

1. Ratkaise epäyhtälö
$$\sqrt[4]{1-x} < \sqrt[8]{2x+5}.$$
Opastus: Koska kyseessä on parilliset juuret, niin molempien juurrettavien on oltava ei-negatiivisia.

2. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$ ja olkoon $f:]\alpha, +\infty[\to]0, +\infty[$ funktio siten, että
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$
Osoita Määritelmää 4.2.4 käyttäen, että
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

3. Ratkaise epäyhtälö
$$e^{-x} - 2 \leq -e^{x-1}.$$
Opastus: Käytä ratkaisussasi toisen asteen yhtälön ratkaisukaavaa lausekkeelle e^x.

4. Olkoon $f(x) = \ln(\ln \sqrt[5]{x-3})$. Määrää luonnollisen logaritmin sekä juurifunktion perusominaisuuksia käyttäen funktion f määrittelyjoukko ja arvojoukko.

5. Osoita eksponenttifunktion ja logaritmin monotonisuusominaisuuksia käyttäen, että funktio $f(x) = x^a$ on arvoilla $x > 0$
   (a) aidosti kasvava, jos $a > 0$;
   (b) aidosti vähenevä, jos $a < 0$.

6. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Funktiolle $f:]\alpha, \infty[\to \mathbb{R}$ on voimassa $\lim\limits_{x\to\alpha^+} f(x) = +\infty$, jos jokaista lukua $M > 0$ vastaa luku $\delta > 0$ siten, että
$$\alpha < x < \alpha + \delta \implies f(x) > M.$$
Osoita yo. raja-arvon määritelmään nojautuen, että kaikilla $a < 0$ on voimassa
$$\lim_{x\to0^+} x^a = +\infty.$$
Opastus: Todistettavana olevan raja-arvon tapauksessa on $\alpha = 0$ ja $f(x) = x^a$.