Analyysi I
Syksy 2008
Harjoitus 10 (viikko 46)

1. Olkoon f derivoituva origon eräässä ympäristössä $B(0,r)$. Oletetaan, että $f(0)=0$ ja $f'(0)=1$. Osoita, että on olemassa luku $\delta>0$ siten, että
$$0<|x|<\delta \implies \frac{1}{2}<\frac{f(x)}{x}<\frac{3}{2}.$$
Opastus: Osoita derivaatan määritelmää ja oletuksia $f(0)=0$ ja $f'(0)=1$ käyttäen raja-arvo
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1.$$
Tämän jälkeen sovella raja-arvon määritelmää yo. raja-arvoon valitsemalla $\varepsilon=\frac{1}{2}$.

2. Olkoot f ja g derivoituvia funktioita. Osoita ns. tulon derivoimissääntö, eli
$$D(f(x)g(x))=g(x)Df(x)+f(x)Dg(x).$$
Opastus: Voidaan kirjoittaa
$$f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)=f(x+h)(g(x+h)-g(x))+g(x)(f(x+h)-f(x)).$$
Koska f on derivoituva, niin Lauseen 5.1.3 mukaan f on jatkuva. Näin ollen
$$\lim_{h\to 0}f(x+h)=f(x).$$

3. Esitä funktio $x\mapsto e^{(x^2-1)^3}$ kolmen funktion f, g ja h yhdisteenä, ts. määrää funktiot f, g ja h siten, että $(f\circ g\circ h)(x)=e^{(x^2-1)^3}$. Laske funktion $f\circ g\circ h$ derivaatta ketjusäännön avulla.

4. Funktiolla $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+2x^3$, on käänteisfunktio $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,
$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}.$$
Laske $(f^{-1})'(3)$
   (a) kääneteisfunktion lausekkeen avulla,
   (b) käyttämällä käänteisfunktion derivoimiskaavaa.

   Kummallakin laskutavalla tulisi luonnollisesti saada sama vastaus.

5. Olkoon $f(x)=x^9+x^7+x^5+4x^3+7x$. Osoita Rollen lauseen avulla, että funktiolla f on täsmälleen yksi reaalinen nollakohta.
Opastus: Koska $f(0)=0$, niin funktiolla f on *ainakin* yksi reaalinen nollakohta. Tulee siis vielä osoittaa, että funktiolla f on *korkeintaan* yksi reaalinen nollakohta. Tee vastaoletus, että funktiolla f on ainakin kaksi reaalista nollakohtaa, eli että on olemassa pisteet $a,b\in\mathbb{R}$ siten, että $a<b$ ja $f(a)=f(b)=0$. Tämän jälkeen käytä Rollen lausetta.