
Analyysi I
Syksy 2008
Harjoitus 11 (viikko 47)

1. Määää luku c , kun väliarvolausetta sovelletaan funktioon $f(x) = e^x$ välillä $[0, 2]$.
(Vanhanmuotoisen Analyysi 1 -kurssin loppukoe tehtävä, syksy 2000.)

2. Oletetaan, että

- (a) f on jatkuva välillä $[a, b]$,
- (b) f on derivoituva välillä $]a, b[$,
- (c) $f'(x) = 0$ kaikilla $x \in]a, b[$.

Osoita väliarvolauseen avulla, että $f(x) = f(a)$ kaikilla $x \in [a, b]$.

3. Määää raja-arvot

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\tan(11x)}$,
- (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^4)}{3x^2}$.

4. Olkoon $\alpha < 0$. Selvitä, millä välillä funktio

$$f(x) = x^\alpha \ln x$$

on aidosti kasvava.

5. Määää funktion $f(x) = |\sin x| + \cos x$ suurin ja pienin arvo joukossa \mathbb{R} .

Opastus: Tarkastele funktiota f ensin väleillä $[-\pi, 0]$ ja $[0, \pi]$. Osoita, että $x = 0$ on funktion f derivoitumattomuuspiste. Lopuksi laajenna tarkastelusi joukkoon \mathbb{R} käyttämällä sinin ja kosinin 2π -jaksollisuutta.

6. Osoita ääriarvotarkastelun avulla, että kaikilla $x > 0$ pätee $\ln(1 + x) < x$.