
Analyysi I
Syksy 2008
Harjoitus 14 (viikko 50)

Kurssin loppuohjelma: Viimeinen kurssimateriaaliin liittyvä luento PE 5.12. Viikolla 50 laskuharjoitusryhmät normaalisti (Harjoitus 14). Kertausluento KE 10.12 klo 12.15–14.00 salissa N100 (biologian auditorio). Välikoe II MA 15.12 klo 8.00–10.00 salissa M100.

1. Olkoon $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integroitava siten, että $m \leq f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$. Osoita, että

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Opastus: Määrittele porraskäyrät $\varphi(x) = m$ ja $\psi(x) = M$ ja sovelta tämän jälkeen Lausetta 6.3.4.

2. Olkoot g ja h derivoituvia avoimella välillä Δ ja olkoon f jatkuva suljetulla välillä, joka sisältää kuvajoukot $g(\Delta)$ ja $h(\Delta)$. Osoita, että kaikilla $x \in \Delta$ on voimassa

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt \right) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

Opastus: Analyysin peruslause ja ketjusääntö.

3. Tehtävän 2 tulosta soveltaen laske $F'(1)$, kun

$$F(x) = \int_{-3x}^{2x^3} \sqrt{1+t^4} dt.$$

4. Integraalilaskennan väliarvolauseeseen sovelluksia:

(a) Osoita, että kaikilla $a > 0$ on voimassa

$$\int_0^a e^x(1+x)^{-1} dx > a.$$

(b) Laske raja-arvo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+2} \overline{\arctan} x dx.$$

5. Laske Lausetta 6.5.6 soveltaen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos^2 x)^2 \sin x dx.$$

Määrittele lauseessa esiintyvät funktiot $f(x)$ ja $g(x)$ sekä integroimisväli $[a, b]$.