Analyysi I
Syksy 2008
Integraalilaskennan sovelluksia

Tehtävä 1. Laske sen alueen pinta-ala, joka on käyrän $y = 3x - x^2$ alapuolella ja x-akselin yläpuolella.

Ratkaisu. Lasketaan ensin käyrän $y = 3x - x^2$ ja x-akselin leikkauspisteet:

$$y = 0 \iff x(3-x) = 0 \iff x = 0 \text{ tai } x = 3.$$

Käyrän $y = 3x - x^2$ kuvaaja on alaspäin aukeava paraabeli, joka leikkaa x-akselin pisteissä $x = 0$ ja $x = 3$. Pinta-alaksi A saadaan siten

$$\begin{aligned} A &= \int_0^3 |3x - x^2|\, dx = \int_0^3 (3x - x^2)\, dx \\ &= \Big/_0^3 \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

Tehtävä 2. Laske funktion $f(x) = e^{-x} + \cos x$ keskiarvo välillä $[-\frac{\pi}{2}, 0]$.

Ratkaisu. Kysytty keskiarvo $\bar{f}$ saadaan laskettua suoraan määritelmän nojalla:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{0 - \left(-\frac{\pi}{2}\right)} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 f(x)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(e^{-x} + \cos x\right)\, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \Big/_{-\frac{\pi}{2}}^0 \left(-e^{-x} + \sin x\right) = \frac{2}{\pi}\left(-1 + 0 - \left(-e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)\right) = \frac{2}{\pi} e^{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Tehtävä 3. Laske sen pyörähdyskappaleen tilavuus, joka muodostuu, kun käyrä $y = 1 + e^x$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä [0,2].

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = 1 + e^x$. Tällöin kysytty tilavuus V on

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^2 f(x)^2\, dx = \pi \int_0^2 \left(1 + 2e^x + e^{2x}\right)\, dx = \pi \Big/_0^2 \left(x + 2e^x + \frac{1}{2}e^{2x}\right) \\ &= \pi\left(2 + 2e^2 + \frac{1}{2}e^4 - \left(0 + 2 + \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}\left(e^4 + 4e^2 - 1\right). \end{aligned}$$

Tehtävä 4. Laske sen pyörähdyskappaleen vaipan ala (ei päätyjen aloja), joka muodostuu, kun käyrä $y = x^3$ pyörähtää x-akselin ympäri välillä [0,2].

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = x^3$. Tällöin $f'(x) = 3x^2$, joten kysytty pinta-ala A on

$$A = 2\pi \int_0^2 |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = 2\pi \int_0^2 x^3 \sqrt{1 + 9x^4}\, dx.$$

Tehdään muuttujanvaihto $t = 1 + 9x^4$, jolloin $dt = 36x^3\, dx$. Kun $x : 0 \to 2$, niin $t : 1 \to 145$. Nyt

$$\begin{aligned} A &= \frac{2\pi}{36} \int_0^2 \left(1 + 9x^4\right)^{\frac{1}{2}} 36x^3\, dx = \frac{\pi}{18} \int_1^{145} t^{\frac{1}{2}}\, dt \\ &= \frac{\pi}{18} \Big/_1^{145} \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} = \frac{\pi}{27}\left(145^{\frac{3}{2}} - 1\right). \end{aligned}$$

Tehtävä 5. Laske käyrän $y = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$, $1 \leq x \leq 2$, pituus.

Ratkaisu. Merkitään $f(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{1}{4x^2}$. Tällöin

$$\begin{aligned}1 + f'(x)^2 &= 1 + \left(\frac{x^3}{2} - \frac{1}{2x^3}\right)^2 = 1 + \frac{x^6}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^6} \\ &= \frac{x^6}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4x^6} = \left(\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3}\right)^2.\end{aligned}$$

Annetun käyrän pituus L on siis

$$\begin{aligned}L &= \int_1^2 \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^3}\right) dx \\ &= \Big/_1^2 \left(\frac{x^4}{8} - \frac{1}{4x^2}\right) = 2 - \frac{1}{16} - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{33}{16}.\end{aligned}$$