180111 Analyysi I (9 op)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 8^+} \frac{1}{x-8} &= +\infty \\
\lim_{x\to 5^+} \frac{1}{x-5} &= +\rotatebox{90}{5}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sin x &= 6 \\
\frac{1}{\cancel{n}}\,\mathrm{si}\cancel{n}\, x &= 6 \\
\mathrm{si}\, x &= 6
\end{aligned}
$$

Luentorunko

Joensuun yliopisto

Syksy 2008

Sisältö

Lukijalle

Käsissäsi oleva moniste on Joensuun yliopistossa luennoitavan kurssin Analyysi I luentorunko. Teksti sisältää keskeiset kurssilla vastaantulevat määritelmät ja tulokset, mutta ei juuri lainkaan esimerkkejä tai todistuksia. Esimerkit ja ylipäätään varsinainen matemaattinen päättely esitetään kurssin luennoilla. Tästä seuraa, että kurssilla vaadittavaa osaamista ei voi tavoittaa pelkästään lukemalla luentorunkoa. Luentorungon pääasiallinen etu on siinä, että luennoilla ei tarvitse kirjoittaa niin paljoa. Näin luentotilaisuudessa aikaa jää myös oppimiselle. Lisäksi luentorunko antaa luennoitsijalle mahdollisuuden kuvailla asioiden välisiä yhteyksiä monisanaisemmin tavalla, joka ajanpuutteen vuoksi ei muuten olisi mahdollista luennoilla.

Teksti sisältää myös pienellä fontilla kirjoitettuja todistuksia, lisäyksiä, huomautuksia jne. Tämä on materiaalia, jota kurssilla ei vaadita osattavaksi, mutta joka on aiheen paremman ymmärtämisen kannalta relevanttia.

Tämän moniste pohjautuu Myrbergin oppikirjaan *Differentiaali- ja Integraalilaskenta I.* Monisteeseen on otettu pätkiä Merikoski-Halmetoja-Tossavaisen oppikirjasta *Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan*, sekä useista Calculus-oppikirjoista. Tekstissä olevat painovirheet ovat kuitenkin allekirjoittaneen vastuulla.

Janne Heittokangas

1. Reaaliluvut

Antiikin Kreikassa matematiikan filosofia perustui siihen pythagoralaiseen näkemykseen, että kaikki matemaattinen tietous voidaan esittää kokonaisluvuilla. Koska rationaaliluku voidaan esittää kahden kokonaisluvun avulla, niin erityisesti kaikki se matemaattinen tietous, joka voidaan esittää rationaaliluvuilla, voidaan palauttaa kokonaislukuihin. Täten kreikkalaiset matemaatikot hyväksyivät myös rationaaliluvut, mutta sitä laajempaa lukujoukkoa ei heidän mielestään voinut olla. Toisaalta he tiesivät, että rationaaliluvut eivät riitä kaikkien janojen mittaamiseen.

Yhä tänäkin päivänä käsittelemme reaalilukuja yleensä rutiininomaisesti pitäen itsestään selvänä sitä, mitä ne oikeastaan ovat. Kannattaa kuitenkin huomata, että reaalilukujen eksakti määrittely on kaikkea muuta kuin itsestäänselvyys. Tämä määrittely perustuu aksioomiin, eli tosina pidettäviin väittämiin.

1.1. Johdatus aksiomaattiseen päättelyyn

Matemaattisen teorian rakentamisessa käytetään aksiomatiikkaa. Tällöin lähtökohdiksi otetaan tietyt väitteet, jotka hyväksytään tosiksi ilman todistusta. Näistä aksioomista johdetaan matemaattisia lauseita, ja niistä edelleen uusia lauseita. Analyysissä perusalkioina ovat reaaliluvut ja kompleksiluvut. Siksi analyysin teorian rakentaminen aloitetaan reaalilukujen määrittelemisestä aksiomaattisesti.

Aksioomien muodostamalla aksioomajärjestelmällä tulee olla seuraavat ominaisuudet:

(1) Ristiriidattomuus. Aksioomat eivät saa olla keskenään ristiriidassa, eikä niiden perusteella saa voida todistaa kahta keskenään ristiriitaista väitettä.

(2) Riippumattomuus. Mikään aksiooma ei saa seurata muista aksioomista.

Jos aksioomajärjestelmä halutaan "lopullisesti" valmiiksi, niin sillä tulee lisäksi olla kolmas ominaisuus:

(3) Täydellisyys. Kaikki perusalkioita ja perussuhteita koskevat mielekkäät väitteet täytyy voida todistaa joko oikeiksi tai vääriksi. Jos tiettyä väitettä ei voida todistaa oikeaksi eikä vääräksi, niin uudeksi aksioomaksi voidaan ottaa tämä väite tai vaihtoehtoisesti sen negaatio (vastakohta), jolloin saadaan kaksi erilaista aksioomajärjestelmää.

Kysymys aksioomajärjestelmän täydellisyydestä mutkistui, kun Kurt Gödel (1906–1978) todisti, että jokaisessa aksiomaattisesti rakennetussa matemaattisessa teoriassa on aina aksioomajärjestelmälle relevantteja lauseita, jotka siis kuuluvat teoriaan, mutta joita ei voida todistaa tosiksi tai epätosiksi tämän teorian sisällä (ns. epätäydellisyyslause). Gödelin epätäydellisyyslause osoittaa aksiomaattis-deduktiivisen menetelmän puutteet. Menetelmää ei silti tarvitse hylätä, sillä sen edut ovat osoittautuneet hyvin suuriksi.

Esimerkkinä ratkaisemattomasta väitteestä on ns. kontinuumihypoteesi, jonka mukaan sellaista joukkoa, jonka kardinaliteetti on aidosti joukkojen $\mathbb{N}$ ja $\mathbb{R}$ kardinaliteettien välissä, ei ole olemassa.

Reaalilukujen aksioomiin nojautuvissa päättelyissä edetään hyvin pienin ”askelin” — jokainen yhtäsuuruus tai epäyhtälö perustellaan viittaamalla johonkin aksioomaan. Tällaista ajattelutapaa voi havainnollistaa vaikkapa ns. SHIP-DOCK-lauseeseen liittyvällä sanapelillä, jossa sana muutetaan toiseksi peräkkäisten siirtojen kautta: SHIP, SHOP, SHOT, SLOT, SOOT, LOOT, LOOK, LOCK, DOCK. Kunkin siiron aikana saa muuttaa (mutta ei siirtää) täsmälleen yhden kirjaimen, ja syntyvän sanan on oltava oikea sana. Kyseistä sanapeliä voi pelata myös suomeksi — esim. sanasta ”kissa” saadaan sana ”koira” vaikkapa seuraavalla päättelyllä: KISSA, KASSA, KANSA, KANTA, KAITA, KAIRA, KOIRA.

1.2. Luonnolliset luvut

On sopimuskysymys sisältyykö luku nolla *luonnollisiin lukuihin* $\mathbb{N}$ vai ei. Tällä kurssilla sovitaan, että

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Luonnollisia lukuja (engl. natural numbers) kutsutaan myös *positiivisiksi kokonaisluvuiksi* (positive integers).

Mitä luonnollisilla luvuilla sitten tarkoitetaan? Voitaisiin yrittää vastata vaikkapa, että ”Luonnolliset luvut ovat niitä, joilla ilmoitetaan äärellisen joukon alkioiden lukumääriä”. Tämä vastaus aiheuttaa kuitenkin jatkokysymykset ”Mitä tarkoitetaan äärellisellä joukolla?” ja ”Mitä tarkoitetaan alkioiden lukumäärällä?”. Samantyyppisiin puutteisiin törmätään muissakin vastaavissa yrityksissä.

Suurin osa luonnollisten lukujen tunnetuista ominaisuuksista saadaan johdettua ns. Peanon aksioomien avulla. (Giuseppe Peano, 1858–1932)

Peanon aksiomaattinen määritelmä. Joukkoa $\mathbb{N}$ sanotaan luonnollisten lukujen joukoksi, jos se toteuttaa seuraavat viisi ehtoa:

(N1) $1 \in \mathbb{N}$.

(N2) Jokaisella alkiolla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa täsmälleen yksi *seuraaja* $n' \in \mathbb{N}$.

(N3) Jos $n \in \mathbb{N}$, niin $n' \neq 1$ (n:n seuraaja ei ole yksi).

(N4) Jos $n \in \mathbb{N}$ ja $m \in \mathbb{N}$, ja jos $n' = m'$, niin $n = m$.

(N5) Jos A on joukon $\mathbb{N}$ osajoukko siten, että $1 \in A$, ja jos ehdosta $n \in A$ seuraa $n' \in A$, niin silloin $A = \mathbb{N}$.

Luonnollisesti otamme käyttöön merkinnät 1’=2, 2’=3, 3’=4, jne. Esimerkiksi luvun 2 seuraaja on 3, ja luku 37 on luvun 36 seuraaja.

Aksioomat (N1)–(N4) tuntuvat varsin luonnollisilta. Aksioomaa (N5) voidaan havainnollistaa seuraavalla päättelyllä:

> Tarkastellaan joukon $\mathbb{N}$ osajoukkoa A (eli $A \subset \mathbb{N}$), joka toteuttaa aksiooman (N5). Tällöin $1 \in A$. Koska ehdosta $n \in A$ seuraa $n' \in A$, niin $2 = 1' \in A$. Edelleen, koska ehdosta $n \in A$ seuraa $n' \in A$, niin $3 = 2' \in A$. Ja vielä toistaen, koska ehdosta $n \in A$ seuraa $n' \in A$, niin $4 = 3' \in A$. Voimme

jatkaa tätä monotonista päättelyä loputtomiin ja näin ollen päätellä, että mikä tahansa joukon $\mathbb{N}$ alkio kuuluu myös joukkoon A (eli $\mathbb{N} \subset A$). Tuntuu siis järkevältä päätellä, että $A = \mathbb{N}$. Tämä juuri järkeväksi todettu johtopäätös sisältyy aksioomaan (N5).

Määritelmä 1.2.1. Luonnollisten lukujen n, m yhteenlasku määritellään asettamalla

$$\begin{cases} n + 1 = n' \\ n + m' = (n + m)', \end{cases}$$

ja kertolasku asettamalla

$$\begin{cases} n \cdot 1 = n \\ n \cdot m' = (n \cdot m) + n. \end{cases}$$

Esimerkki 1.2.2. Laske Peanon aksioomien avulla $2 + 2$.

Esimerkki 1.2.3. Laske Peanon aksioomien avulla $3 \cdot 2$.

Induktioperiaate. Seuraava päättely pohjautuu Peanon aksioomaan (N5). Oletetaan, että jokaiseen luonnolliseen lukuun $n \in \mathbb{N}$ liittyy väite P_n, joka voi olla tosi tai epätosi. Induktioperiaate on luonnollisiin lukuihin liittyvä ominaisuus, jonka mukaan ehdoista

(1) P_1 on tosi;

(2) P_{n+1} on tosi aina kun P_n on tosi, $n \in \mathbb{N}$;

seuraa, että P_n on tosi kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Induktioperiaatteeseen perustuvassa todistuksessa on varmistettava kummankin ehdon (1) ja (2) paikkansapitävyys. Käytännössä ehto (1) on usein helppo todeta. Induktioperiaatteeseen syvennytään tarkemmin Johdantokurssilla.

Esimerkki 1.2.4. Osoitetaan, että $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lukuun n liittyvä väite P_n on nyt muotoa

$$P_n: \; 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Väitteen P_1 mukaan $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ja väitteen P_2 mukaan $1+2 = \frac{2(2+1)}{2}$. Väite P_{37} puolestaan on $1 + 2 + \cdots + 37 = \frac{37(37+1)}{2} = 703$, jne. Huomataan, että erityisesti väite P_1 on tosi, joten se voidaan ottaa induktiivisen päättelyn lähtökohdaksi.

Tehdään induktio-oletus, että P_n on totta. Oletamme siis, että $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ on voimassa. Tähän perustuen yritämme osoittaa väitteen P_{n+1} paikkansapitävyyden. Lisätään luku $n+1$ em. yhtälön molemmille puolille, saadaan

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \\ &= \\ &= \end{aligned}$$

Olemme osoittaneet, että jos väite P_n on totta, niin myös väite P_{n+1} on totta. Induktioperiaatteen mukaan väitteet P_n ovat totta kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

1.3. Kokonaisluvut ja rationaaliluvut

Soveltamalla Peanon aksioomia induktiivisesti tarvittavan monta kertaa, voidaan todeta, että tavanomainen yhteenlasku on laskutoimitus luonnollisten lukujen joukossa: Jos $n, m \in \mathbb{N}$, niin $n + m \in \mathbb{N}$. Vähennyslasku ei kuitenkaan ole laskutoimitus luonnollisten lukujen joukossa, sillä $2, 3 \in \mathbb{N}$, mutta $2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$. Myöhemmin tällä kurssilla opimme, että reaalilukujen vähennyslasku on itse asiassa yhteenlaskua vastaluvuilla.

Lapsuudesta saakka olemme huomanneet käsitteiden ”negatiivinen” ja ”nolla” tärkeyden. On siis luonnollista laajentaa lukukäsityksemme luonnollisten lukujen joukosta *kokonaislukujen* (integers) joukkoon

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Myös lukujoukko $\mathbb{Z}$ käy riittämättömäksi, kun mukaan liitetään jakolasku. Myöhemmin tällä kurssilla kuitenkin opimme, että reaalilukujen jakolasku on itse asiassa kertolaskua käänteisluvuilla. Reaalilukujen tavanomaisiksi laskutoimituksiksi riittävät siis yhteenlasku ja kertolasku. Jakolaskun mahdollistamiseksi laajennetaan lukukäsitettämme edelleen *rationaalilukujen* (rational numbers) joukkoon $\mathbb{Q}$, joka määritellään asettamalla

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Edellä määritellyt lukujoukot siis sisältyvät toisiinsa joukkoinkluusioiden $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ mukaisesti. Jatkossa oletetaan, että näiden lukujoukkojen laskutoimitus- ja järjestysominaisuudet tunnetaan.

1.4. Epäsuora todistus

Tämä luku on tarkoitettu täsmennykseksi niille, joille epäsuora todistus ei ole ennestään tuttu. Epäsuoran todistuksen idea on yksinkertaisimmallaan siinä, että implikaatio

$$A \implies B$$

on loogisesti ekvivalentti implikaation

$$\neg B \implies \neg A$$

kanssa. Epäsuoraa todistusta käsitellään tarkemmin Johdantokurssilla.

Esimerkki 1.4.1. Jos $n \in \mathbb{Z}$ ja n^2 on parillinen, niin n on parillinen.

Todistus. Huomataan ensin, että luku n on parillinen, jos $n = 2m$ jollekin $m \in \mathbb{Z}$ ja pariton, jos $n = 2k + 1$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$. Todistettavana oleva väite on implikaatio $A \implies B$, missä A on looginen lause

$$A = \text{”}n \in \mathbb{Z} \text{ ja } n^2 \text{ on parillinen”}$$

ja B on looginen lause

$$B = \text{”}n \in \mathbb{Z} \text{ ja } n \text{ on parillinen”}.$$

Todistetaan implikaatio epäsuorasti, eli oletetaan $\neg B$ voimassa olevaksi — tehdään siis vastaoletus, eli ns. *antiteesi.*

Antiteesi: $n \in \mathbb{Z}$ ja n on pariton. Tällöin $n = 2k + 1$ jollekin $k \in \mathbb{Z}$, mistä seuraa, että

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Näin ollen n^2 on pariton, eli $\neg A$ pätee. Olemme siis päätyneet ristiriitaan alkuperäisen oletuksen A kanssa, joten antiteesi oli väärä. Näin ollen n on parillinen. $\square$

1.5. Reaaliluvut intuitiivisesti

Lukujoukko $\mathbb{Q}$ on melko tyydyttävä, sillä sen alkioiden välillä voidaan harjoittaa yhteen-, vähennys-, kerto- ja jakolaskuja. Joukko $\mathbb{Q}$ ei kuitenkaan ole täydellinen. Seuraavassa lainaus Mika Waltarin kirjasta "Turms, kuolematon":

> Pythagoralainen peitti kasvonsa käsivarteensa peittääkseen meiltä kyyneleensä. Lopulta hän saavutti malttinsa takaisin ja myönsi: "Jos kaikki tosiaan olisi niin yksinkertaista, havainnollista ja kaunista kuin Pythagoras opetti ennen kuolemaansa, olisi elämä ja viisaus helppoa. Mutta se ei ole totta. En ole rikollinen, eivätkä pythagoralaiset minua erottaneet keskuudestaan, vaan lähdin itse havaittuani kaiken mielettömyyden. Kaunis on tasasivuinen kolmio. Vielä kauniimmalta näyttää tasasivuinen neliö. Mutta jo yksin tämä yksinkertainen muoto on kirottu, sillä neliön halkaisijan ja sivun suhdetta ei pysty ilmaisemaan mikään luku. Tätä suhdetta voi laskea koko ikänsä eikä luku pääty koskaan. Niin kauhean tiedon paljastumiseen johti yksinkertainen ja kaunis lukujen oppi. Ei pythagoralaisuus tuhoutunut salaseuraisuuteen kuten tyrannit luulivat, vaan tähän kauhistuttavaan salaistietoon. On suhteita, joita ilmaiseva luku on päättymätön."

Lukusuora. Tarkastellaan reaalilukuja intuitiivisesti. Reaaliluvut (real numbers) ovat lukuja, joita voidaan käyttää mitattaessa etäisyyksiä ja aikaa, sekä muita sellaisia fysikaalisia suureita, kuten massaa ja lämpötilaa, joiden ajatellaan muuttuvan jatkuvasti. Reaaliluvut voidaan konkreettisesti tulkita *lukusuoran* pisteiksi. Lukusuora saadaan aikaan, jos annetulta tason suoralta valitaan kaksi pistettä 0 ja 1. Tällöin mittayksikkö ja positiivinen suunta tulevat kiinnitetyksi. Nyt jokaista lukusuoran positiivisen puolen pistettä vastaa jokin janan pituus ja jokaista negatiivisen puolen pistettä janan pituuden vastaluku.

Rationaalipisteiden joukko lukusuoralla on siinä mielessä epätäydellinen, että kaikkia janojen pituuksia ei voida niiden avulla ilmoittaa. Eo. lainauksesta huolimatta jo antiikin kreikkalaiset osasivat todistaa, että yksikköneliön lävistäjän pituus, ts. yhtälön $x^2 = 2$ positiivinen ratkaisu, ei ole rationaaliluku.

Lause 1.5.1. *Mikään rationaaliluku x ei toteuta yhtälöä*

$$x^2 = 2.$$

Todistus. Tehdään vastaoletus, eli oletetaan, että yhtälö toteutuu jollakin $x = \frac{p}{q}$. Voidaan olettaa, että p ja q ovat positiivisia kokonaislukuja (luonnollisia lukuja). Jakamalla tarvittaessa yhteiset tekijät pois, niin voidaan myös olettaa, että luvuilla p ja q ei ole yhteisiä tekijöitä.

Annetusta yhtälöstä saadaan

$$x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2,$$

ja siis

$$p^2 = 2q^2.$$

Näin ollen p^2 on parillinen. Mutta tällöin Esimerkin 1.4.1 mukaan myös p on parillinen. Koska p on parillinen, se on muotoa $p = 2m$, ja siis $p^2 = 4m$. Saadaan $4m = 2q^2$, josta $q^2 = 2m$. Siis q^2 on parillinen, josta seuraa, että q on parillinen. Tämä on ristiriita, sillä oletettiin, että luvuilla p ja q ei ole yhteisiä tekijöitä. Näin ollen mikään rationaaliluku ei voi toteuttaa ko. yhtälöä. □

Rationaaliset pisteet eivät siis täytä koko lukusuoraa, vaan on olemassa muitakin pisteitä. Näitä pisteitä kutsutaan *irrationaalisiksi* (irrational). Lukusuoran kaikkien pisteiden joukko on reaalilukujen intuitiivinen vastine.

Irrationaaliluvuilla ei ole tarkkaa numeerista arvoa, vaan niillä laskettaessa täytyy tyytyä rationaalisiin likiarvoihin, jotka kylläkin saadaan mielivaltaisen tarkoiksi. Esimerkiksi luvun π miljoona tai jopa miljardi ensimmäistä desimaalia voidaan laskea, mikäli käytettävissä on tarpeeksi nopea tietokone ja tarpeeksi hyvä menetelmä.

Irrationaalilukua voidaan ajatella sellaisena ”raja-arvona”, joka saadaan tarkastelemalla sen rationaalisia likiarvoja ja antamalla oikeiden desimaalien määrän ”lähestyä ääretöntä”. Näin äärettömyys on taustalla irrationaaliluvun olemuksessa ja sitä kautta koko analyysissä. Se tekee analyysin vaikeaksi, mutta vaikeudet voidaan voittaa raja-arvoajattelulla.

Lukusuora on lukujen määrittelyn kannalta epätäsmällinen lähtökohta, sillä se perustuu intuitiiviseen geometriseen ajatukseen. Reaalilukujen eksakti määrittely on hankala prosessi, ja se voidaan tehdä useilla vaihtoehtoisilla tavoilla. Ongelma on siinä, kuinka irrationaaliluvut saadaan ”luotua” vain rationaalilukuja ja niiden ominaisuuksia käyttäen. Cantor (1845–1918) ja Dedekind (1831–1916) ovat jääneet historiaan ensimmäisinä matemaatikkoina, jotka onnistuivat eksaktisti konstruoimaan reaaliluvut rationaalilukujen avulla. Kumpikin julkaisi ratkaisunsa (jotka ovat olennaisesti erilaisia) samana vuonna 1872. (Merikoski-Halmetoja-Tossavainen: Johdatus matemaattisen analyysin teoriaan)

1.6. Reaalilukujen algebralliset ominaisuudet

Modernissa matemaattisessa kirjallisuudessa reaaliluvut määritellään tavallisesti aksiomaattisesti. Tällainen määritelmä on periaatteessa helppo esittää, mutta ongelmana on yhtäältä se, että määritelmän mielekkyys ei ole selvää, ja toisaalta se, että määritelmän lähempi tarkastelu ei ole mielekästä ennen kuin abstraktin algebran alkeet hallitaan.

Määritelmä 1.6.1. Reaaliluvuilla $(\mathbb{R}, +, \cdot, <)$ tarkoitetaan järjestettyä kuntaa, joka toteuttaa täydellisyysaksiooman.

Määritelmän mielekkyys perustuu siihen, että voidaan todistaa Määritelmän 1.6.1 struktuurin olevan yksikäsitteisenä olemassa. Toisaalta Määritelmä 1.6.1 sisältää vain ehtoja, jotka intuitiivisesti vastaavat ajatustamme siitä, mitä ominaisuuksia reaaliluvuilla on.

Järjestetyn kunnan aksioomat. Algebrallinen struktuuri $(F, +, \cdot)$ on *kunta*, jos F on vähintään kahden alkion joukko, jonka laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ toteuttavat ominaisuudet (A1)–(A9):

(A1) $x + y = y + x$ kaikilla $x, y \in F$.

(A2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ kaikilla $x, y, z \in F$.

(A3) On olemassa alkio $0 \in F$, jolle pätee $x + 0 = x$ kaikilla $x \in F$.

(A4) Kaikilla $x \in F$ on olemassa $-x \in F$, jolle $x + (-x) = 0$.

(A5) $x \cdot y = y \cdot x$ kaikilla $x, y \in F$.

(A6) $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ kaikilla $x, y, z \in F$.

(A7) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ kaikilla $x, y, z \in F$.

(A8) On olemassa luku $1 \in F$ joka toteuttaa ehdon $1 \cdot x = x$ kaikille $x \in F$.

(A9) Kaikilla $x \in F \setminus \{0\}$ on olemassa $x^{-1} \in F$, jolle $x \cdot x^{-1} = 1$.

Edelleen kunta $(F, +, \cdot)$ on *järjestetty kunta*, jos joukossa F on määritelty relaatio $<$, joka toteuttaa seuraavat ehdot (B1)–(B4) kaikilla $x, y, z \in F$:

(B1) Täsmälleen yksi ehdoista $x < y$, $x = y$, $y < x$ pätee.

(B2) Jos $x < y$ ja $y < z$, niin $x < z$.

(B3) Jos $x < y$, niin $x + z < y + z$.

(B4) Jos $x > 0$ ja $y > 0$, niin $x \cdot y > 0$.

Huomautus. Myös rationaaliluvut $(\mathbb{Q}, +, \cdot, <)$ muodostavat järjestetyn kunnan, joka kuitenkaan ei toteuta täydellisyysaksioomaa. Tätä tarkastellaan Luvussa 1.9.

Järjestetyssä kunnassa merkitään $x \leq y$ jos $x < y$ tai $x = y$. Kertolaskussa merkitään lyhyesti xy merkinnän $x \cdot y$ sijaan. Järjestetyn kunnan aksioomia käyttäen voidaan todistaa kaikki lukiomatematiikasta tutut reaalilukujen yhteen- ja kertolaskua sekä järjestysrelaatiota koskevat laskusäännöt. Ne pidetään jatkossa tunnettuna.

Seuraavaan lauseeseen on koottu reaalilukujen tärkeimpiä perusominaisuuksia.

Lause 1.6.2. *Olkoot $x, y, a, b \in \mathbb{R}$.*

(a) Jos $a + x = a + y$, niin $x = y$.

(b) Jos $ax = ay$ ja $a \neq 0$, niin $x = y$.

(c) Jos $x + a = b$, niin $x = b - a$.

(d) Jos $xa = b$, missä $a \neq 0$, niin $x = \frac{b}{a} := ba^{-1}$.

(e) Jos $x \neq 0$ ja $y \neq 0$, niin $xy \neq 0$.

(f) $-(-x) = x$.

(g) $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y = x \cdot (-y)$.

(h) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

(i) $-(x+y) = (-x) + (-y)$.

(j) *Jos* $x \leq y$ *ja* $x \geq y$ *niin* $x = y$.

(k) *Jos* $x < y$ *ja* $a < b$ *niin* $x + a < y + b$.

(l) *Jos* $x < y$ *ja* $a > 0$, *niin* $ax < ay$.

(m) *Jos* $x < y$ *ja* $a < 0$, *niin* $ax > ay$.

(n) *Jos* $0 < x < y$ *ja* $0 < a < b$, *niin* $xa < yb$.

(o) *Jos* $x \neq 0$, *niin* $x^2 > 0$.

(p) *Olkoon* $x > 0$ *ja* $y > 0$. *Tällöin* $x^2 < y^2$ *jos ja vain jos* $x < y$.

(q) *Olkoon* $x > 0$ *ja* $y > 0$. *Tällöin* $x^2 = y^2$ *jos ja vain jos* $x = y$.

(r) *Jos* $x \neq 0$, *niin* x *ja* x^{-1} *ovat samanmerkkiset.*

(s) *Jos* $0 < x < y$, *niin* $0 < y^{-1} < x^{-1}$.

(t) *Jos* $x < y < 0$, *niin* $y^{-1} < x^{-1} < 0$.

Huomautus. Lukijan tulisi kohdissa (k)–(t) itse formuloida vastaavat väitteet tapauksissa, jossa ainakin yksi aidoista epäyhtälörelaatioista $<$ korvataan relaatiolla $\leq$.

1.7. Itseisarvo ja epäyhtälöt

Algebralliset päättelyt perustuvat tyypillisesti yhtälöihin. Analyysissä sen sijaan epäyhtälöt ovat olennaisia, sillä monet tärkeät asiat ilmaistaan epäyhtälöiden avulla. Esimerkiksi funktion raja-arvon määritelmä sisältää kaksi itseisarvoepäyhtälöä.

Esimerkki 1.7.1. Ratkaistaan epäyhtälö

$$\frac{x}{1-x} \geq -1.$$

(1) $x = 1$ ei ole ratkaisu.

(2) Oletetaan, että $x > 1$. Kertomalla puolittain nimittäjällä (joka on negatiivinen), saadaan ekvivalentisti

$$x \leq -1(1-x) = x - 1 \iff 0 \leq -1.$$

Siis epäyhtälöllä ei ole ratkaisuja joukossa $x > 1$.

(3) Oletetaan, että $x < 1$. Kertomalla puolittain nimittäjällä (joka on nyt positiivinen), saadaan ekvivalentisti $0 \geq -1$. Siis kaikki luvut $x < 1$ ovat ratkaisuja.

Yhdistämällä kohdat (1)–(3), saadaan ratkaisuksi $x < 1$.

Esimerkki 1.7.2. Ratkaistaan epäyhtälö

$$\sqrt{x+2} + x > 1.$$

Arvot $x < -2$ eivät kelpaa ratkaisuiksi, sillä juurrettavan on oltava ei-negatiivinen. Vaaditaan siis ehto $x \geq -2$. Kirjoitetaan epäyhtälö muodossa

$$\sqrt{x+2} > 1 - x. \tag{1.1}$$

Neliöjuuri on ei-negatiivinen, joten arvoilla $1 - x < 0$ epäyhtälö (1.1) pätee. Siis arvot $x > 1$ kelpaavat ratkaisuksi.

Oletetaan, että $-2 \leq x \leq 1$. Tällöin epäyhtälön molemmat puolet ovat ei-negatiivisia ja voidaan korottaa ekvivalentisti puolittain toiseen (Lause 1.6.2(q)). Siis (1.1) pätee jos ja vain jos

$$x + 2 > (1-x)^2 \iff x^2 - 3x - 1 < 0. \tag{1.2}$$

Toisen asteen epäyhtälön (1.2) ratkaisujoukoksi saadaan $\frac{3-\sqrt{13}}{2} < x \leq 1$.

Yhdistämällä ratkaisujoukot alkuperäisen epäyhtälön ratkaisuiksi, saadaan

$$x > \frac{3-\sqrt{13}}{2}.$$

Määritelmä 1.7.3. Luvun $x \in \mathbb{R}$ itseisarvo $|x|$ määritellään asettamalla

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ kun } x \geq 0, \\ -x, \text{ kun } x \leq 0. \end{cases}$$

Huomautus. Siis $|x| \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Esimerkki 1.7.4. Kirjoitetaan lauseke $\big||x-1|-2\big|$ paloittain määriteltynä ilman itseisarvomerkkejä. Poistetaan ensin sisemmät itseisarvot kirjoittamalla

$$\big||x-1|-2\big| = \begin{cases} |x-3|, \text{ kun } x \geq 1 \\ |-x-1|, \text{ kun } x \leq 1. \end{cases}$$

Oletetaan, että $x \geq 1$. Tällöin

$$|x-3| = \begin{cases} x-3, \text{ kun } x \geq 3 \\ -x+3, \text{ kun } x \leq 3. \end{cases}$$

Oletetaan, että $x \leq 1$. Tällöin

$$|-x-1| = |x+1| = \begin{cases} x+1, \text{ kun } x \geq -1 \\ -x-1, \text{ kun } x \leq -1, \end{cases}$$

joten

$$\big||x-1|-2\big| = \begin{cases} -x-1, \text{ kun } x \leq -1 \\ x+1, \text{ kun } -1 \leq x \leq 1 \\ -x+3, \text{ kun } 1 \leq x \leq 3 \\ x-3, \text{ kun } x \geq 3. \end{cases}$$

Seuraavaan lauseeseen on koottu itseisarvon tärkeimpiä perusominaisuuksia.

Lause 1.7.5. *Kaikilla* $x, y \in \mathbb{R}$ *pätee*

(a) $|x| = 0$ *jos ja vain jos* $x = 0$.

(b) $|xy| = |x||y|$.

(c) $|\frac{x}{y}| = \frac{|x|}{|y|}$, *jos* $y \neq 0$.

(d) $|x| = |-x|$.

(e) $|x + y| \leq |x| + |y|$ *(Kolmioepäyhtälö).*

Todistus. (a) Väite seuraa suoraan itseisarvon määritelmästä.

(b) Kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee $|x|^2 = x^2$. Tämä nähdään kirjoittamalla yhtälön vasen ja oikea puoli tapauksissa $x \geq 0$ ja $x < 0$. Korottamalla puolittain neliöön, saadaan

$$|xy| = |x||y| \iff |xy|^2 = (|x||y|)^2 = |x|^2|y|^2 \iff (xy)^2 = x^2y^2.$$

Koska $(xy)^2 = x^2y^2$ pätee, niin väite seuraa yo. ekvivalenssiketjun nojalla.

(c) ja (d) päätellään vastaavaan tapaan neliöönkorotuksella kuin kohta (b).

(e) Saadaan

$$\begin{aligned} |x + y| \leq |x| + |y| &\iff |x + y|^2 \leq (|x| + |y|)^2 \\ &\iff (x + y)^2 \leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &\iff x^2 + 2xy + y^2 \leq x^2 + 2|x||y| + y^2 \\ &\iff xy \leq |x||y|. \end{aligned}$$

Aito epäyhtälö $xy < |x||y|$ pätee ainoastaan silloin, kun toinen luvuista x, y on positiivinen ja toinen negatiivinen. Muissa tapauksissa pätee yhtäsuuruus $xy = |x||y|$. Siis $xy \leq |x||y|$ on aina voimassa, joten kolmioepäyhtälö seuraa yo. ekvivalenssiketjun nojalla. □

Kolmioepäyhtälön geometrinen tulkinta. Nimitys kolmioepäyhtälö juontaa ehdon geometrisesta merkityksestä tason vektoreiden tapauksessa. Jos $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ ovat kaksi erisuuntaista tason vektoria, joiden pituudet ovat $|\overline{x}|$ ja $|\overline{y}|$, ne muodostavat yhdessä summavektorin $\overline{x}+\overline{y}$ kanssa kolmion, jossa kolmannen sivun pituus on $|\overline{x}+\overline{y}|$. Tällöin kolmioepäyhtälö

$$|\overline{x} + \overline{y}| \leq |\overline{x}| + |\overline{y}|$$

ilmaisee sen intuitiivisesti ilmeisen seikan, että kolmiossa kolmannen sivun pituus on korkeintaan yhtä suuri kuin kahden muun sivun pituuksien summa. Lauseen 1.7.5 tilanteessa ollaan siinä rajatapauksessa, jossa vektoreiden $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ päätepisteet sijaitsevat x-akselilla. Tällöin ”kolmio” on litistynyt kasaan.

1.8. Reaalilukuvälit ja avoimet joukot

Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tällöin merkitään

$$\begin{aligned}
]a, b[&= \{ x \in \mathbb{R} : a < x < b \}, \\
]a, b] &= \{ x \in \mathbb{R} : a < x \le b \}, \\
[a, b[&= \{ x \in \mathbb{R} : a \le x < b \} \\
[a, b] &= \{ x \in \mathbb{R} : a \le x \le b \}, \\
]a, +\infty[&= \{ x \in \mathbb{R} : x > a \}, \\
[a, +\infty[&= \{ x \in \mathbb{R} : x \ge a \}, \\
]-\infty, b[&= \{ x \in \mathbb{R} : x < b \}, \\
]-\infty, b] &= \{ x \in \mathbb{R} : x \le b \}.
\end{aligned}$$

Määritelmä 1.8.1. Joukkoa $\Delta \subset \mathbb{R}$ sanotaan *avoimeksi väliksi*, jos Δ on muotoa $]a, b[$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$ tai $\Delta = \mathbb{R}$. Edelleen, joukko $U \subset \mathbb{R}$ on *avoin*, jos U on mikä hyvänsä avoimien välien yhdiste.

Esimerkki 1.8.2. Kirjoita seuraavat joukot käyttäen reaalilukuvälimerkintää:

$$\begin{aligned}
A &= \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} = \\
B &= \{x \in \mathbb{R} : x^3 \le 8\} = \\
C &= \{x^2 : x \in \mathbb{R}\} = \\
D &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 8\} =
\end{aligned}$$

Mitkä joukoista A, B, C, D ovat avoimia?

1.9. Täydellisyysaksiooma: supremum ja infimum

Lukujoukoilla $\mathbb{Q}$ ja $\mathbb{R}$ on se merkittävä ero, että rationaaliluvut eivät muodosta ”jatkumoa” kuten reaaliluvut. Täydellisyysaksioomassa (completeness axiom) on kyse tämän intuitiivisen jatkumoajatuksen eksaktista ilmaisemisesta.

Määritelmä 1.9.1. Osajoukko $E \subset \mathbb{R}$ on *ylhäältä rajoitettu*, jos on olemassa $a \in \mathbb{R}$ siten, että $x \le a$ kaikilla $x \in E$. Tällöin lukua $a \in \mathbb{R}$ sanotaan joukon E *ylärajaksi*. Edelleen a on joukon E *suurin luku*, merkitään $a = \max E$, jos $a \in E$ ja a on joukon E yläraja.

Esimerkki 1.9.2. Olkoon

$$E = \left\{ \frac{n^2}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Koska $\frac{n^2}{n^2+1} < 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin luku 1 eräs E:n yläraja. Myös luku 2 on E:n yläraja. Osoitetaan, että joukossa E ei ole suurinta lukua. Jos $0 < a < 1$, niin

$$\frac{n^2}{n^2+1} > a \iff n^2 > an^2 + a \iff n^2(1-a) > a \iff n > \sqrt{\frac{a}{1-a}}.$$

Siis valitsemalla $n \in \mathbb{N}$ riittävän suureksi, nähdään, että a ei voi olla E:n yläraja. (Päättely on luvallinen Arkhimedeen lauseen nojalla, ks. Luku 1.10.) Myöskään luvut $a \le 0$ eivät ole E:n ylärajoja. Näin ollen luvut $a < 1$ eivät kelpaa E:n suurimmaksi alkioksi. Luvut $a \ge 1$ eivät kuulu joukkoon E, joten myöskään ne eivät kelpaa E:n suurimmaksi alkioksi.

Määritelmä 1.9.3. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ ylhäältä rajoitettu. Luku $a \in \mathbb{R}$ on joukon E *pienin yläraja (supremum)*, merkitään $a = \sup E$, jos ehdot (1) ja (2) toteutuvat:

(1) a on joukon E yläraja.

(2) Jos $b \in \mathbb{R}$ on joukon E yläraja, niin $a \leq b$.

Huomautus. Määritelmän 1.9.3 ehto (2) esitetään usein seuraavassa käyttökelpoisemmassa muodossa:

(2)* Jos $b < a$, niin b ei ole joukon E yläraja.

Tässä on käytetty hyväksi sitä, että implikaatiot $A \Longrightarrow B$ ja $\neg B \Longrightarrow \neg A$ ovat ekvivalentit.

Määritelmän 1.6.1 mukaan reaaliluvut toteuttavat täydellisyysaksiooman.

Täydellisyysaksiooma. *Jokaisella epätyhjällä ylhäältä rajoitetulla reaalilukujoukolla E on pienin yläraja* $\sup E$ *joukossa* $\mathbb{R}$.

Huomautus. Vaikka rationaaliluvut toteuttavatkin kunta-aksioomat (A1)–(A9) ja järjestysaksioomat (B1)–(B4), niin ne eivät toteuta täydellisyysaksiomaa. Olkoon esimerkiksi

$$E = \{ x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2 \}.$$

Joukko E koostuu siis kaikista välillä $]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ olevista rationaaliluvuista. Voidaan osoittaa, että $\sup E = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Tämän todistaminen sivuutetaan teknisenä.

Huomautus. Jos $E \subset \mathbb{R}$ on epätyhjä ja $a := \max E \in \mathbb{R}$, niin $a = \sup E$. Siis joukon supremum yhtyy maksimiin jos jälkimmäinen on olemassa. Osoitetaan, että Määritelmän 1.9.3 ehdot (1) ja (2) toteutuvat:

(1) Koska $a = \max E$, niin a on eräs E:n yläraja.

(2) Jos b on E:n yläraja, niin $x \leq b$ kaikilla $x \in E$. Erityisesti $a \leq b$.

Määritelmä 1.9.4. Osajoukko $E \subset \mathbb{R}$ on *alhaalta rajoitettu*, jos on olemassa $a \in \mathbb{R}$ siten, että $a \leq x$ kaikilla $x \in E$. Tällöin lukua $a \in \mathbb{R}$ sanotaan joukon E *alarajaksi.* Edelleen a on joukon E *pienin luku*, merkitään $a = \min E$, jos $a \in E$ ja a on joukon E alaraja.

Määritelmä 1.9.5. Olkoon $E \subset \mathbb{R}$ alhaalta rajoitettu. Luku $a \in \mathbb{R}$ on joukon E *suurin alaraja (infimum)*, merkitään $a = \inf E$, jos ehdot (1) ja (2) toteutuvat:

(1) a on joukon E alaraja.

(2) Jos $b \in \mathbb{R}$ on joukon E alaraja, niin $b \leq a$.

Määritelmän 1.9.5 ehto (2) voidaan esittää myös seuraavassa ekvivalentissa muodossa:

(2)* Jos $b > a$, niin b ei ole joukon E alaraja.

Reaalilukujen pienimmän ylärajan ominaisuudesta seuraa myös suurimman alarajan ominaisuus, ja kääntäen. Yhtä hyvin voisimme siis valita Lauseen 1.9.6 tuloksen täydellisyysaksioomaksi. Kirjallisuudessa — kuten myös tällä kurssilla — täydellisyysaksioomaksi valitaan kuitenkin supremumia koskeva tulos.

Lause 1.9.6. *Jokaisella epätyhjällä alhaalta rajoitetulla reaalilukujoukolla E on suurin alaraja* $\inf E$ *joukossa* $\mathbb{R}$.

Todistus. Merkitään

$$F := -E := \{\, -x : x \in E \,\}.$$

Koska E on alhaalta rajoitettu, niin E:llä on alaraja. Olkoon m joukon E alaraja jolloin $m \le x$ kaikilla $x \in E$. Tällöin $-x \le -m$ kaikilla $x \in E$, eli $-m$ on joukon F yläraja. Siis F on ylhäältä rajoitettu, joten täydellisyysaksioman nojalla $M := \sup F \in \mathbb{R}$.

Osoitetaan vielä, että $-M = \inf E$:

(1) Olkoon $x \in E$. Tällöin $-x \in F$, joten $-x \le M$. Näin ollen $x \ge -M$, eli $-M$ on joukon E (eräs) alaraja.

(2) Olkoon m eräs E:n alaraja, jolloin siis $-m$ on joukon F yläraja. Tällöin supremumin määritelmän nojalla $-m \ge M$, joten $m \le -M$. Siis $-M$ on E:n alarajoista suurin. □

Huomautus. Jos $E \subset \mathbb{R}$ on epätyhjä ja $a := \min E \in \mathbb{R}$, niin $a = \inf E$. Siis joukon infimum yhtyy minimiin jos jälkimmäinen on olemassa. Tämän todetaan samalla tavalla kuin vastaava supremumia ja maksimia koskeva väite.

1.10. Reaalilukuja koskevia perustuloksia

Arkhimedeen lause. *Jokaista lukua $x \in \mathbb{R}$ kohti on olemassa $n \in \mathbb{Z}$ siten, että $n > x$.*

Todistus. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Tehdään antiteesi: $n \le x$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin joukko $\mathbb{Z}$ on ylhäältä rajoitettu. Täydellisyysaksiooman nojalla on siis olemassa $\sup \mathbb{Z} \in \mathbb{R}$.

Olkoon $n \in \mathbb{Z}$. Tällöin myös $n + 1 \in \mathbb{Z}$, joten $n + 1 \le \sup \mathbb{Z}$. Nyt $n \le \sup \mathbb{Z} - 1$. Siis joukon $\mathbb{Z}$ mielivaltainen alkio on $\le \sup \mathbb{Z} - 1$, joten $\sup \mathbb{Z} - 1$ on eräs joukon $\mathbb{Z}$ yläraja. Siis $\sup \mathbb{Z} \le \sup \mathbb{Z} - 1$, ts. $0 \le -1$. Tämä on ristiriita, joten antiteesi oli väärä. □

Lause 1.10.1. *Kahden reaaliluvun välissä on aina rationaaliluku.*

Todistus. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $a < b$. Nyt $b - a > 0$, joten $\frac{1}{b-a} \in \mathbb{R}$. Arkhimedeen lauseen nojalla on olemassa $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$n > \frac{1}{b-a} \iff n(b-a) > 1.$$

Lisäksi Arkhimedeen lauseen nojalla on olemassa kokonaisluku, joka on $\ge nb$. Olkoon p pienin tällainen kokonaisluku, ts. $p \ge nb$, mutta $p - 1 < nb$. Tällöin $b > \frac{p-1}{n}$. Koska

$$p \ge nb = na + n(b-a) > na + 1,$$

niin

$$p > na + 1 \iff a < \frac{p-1}{n}.$$

Siis $a < \frac{p-1}{n} < b$, missä $\frac{p-1}{n}$ on rationaaliluku. $\square$

Huomautus. Toistamalla edellä olevaa päättelyä voidaan todeta, että välillä $]a, b[$ on itse asiassa ääretön määrä rationaalilukuja. Sanotaan, että rationaaliluvut ovat *tiheässä* (dense) reaalilukujen joukossa.

Seuraavaksi osoitetaan, että myös irrationaaliluvut ovat tiheässä reaalilukujen joukossa:

Lause 1.10.2. *Kahden reaaliluvun välissä on aina irrationaaliluku.*

Todistus. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $a < b$. Lauseen 1.10.1 nojalla reaalilukujen $a - \sqrt{2}$ ja $b - \sqrt{2}$ välissä on olemassa rationaaliluku, ts. on olemassa $q \in \mathbb{Q}$ siten, että

$$a - \sqrt{2} < q < b - \sqrt{2}.$$

Tällöin $a < q + \sqrt{2} < b$, missä $q + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Edellisessä todistuksessa on käytetty apuna seuraavia tuloksia:

(1) $\sqrt{2}$ on irrationaalinen (Lause 1.5.1).

(2) Rationaaliluvun ja irrationaaliluvun summa on irrationaalinen (HT).

2. Reaalilukujonot

Supremumin ja infimumin yhteydessä törmättiin jo välillisesti lukujonon suppenemisen ideaan. Idea on analyysin ymmärtämisen kannalta tärkeä, sillä jonojen suppenemisen kautta voi yksinkertaisimmassa muodossaan omaksua suppenemisen määritelmän ja tiettyjä universaaleja ominaisuuksia.

2.1. Jonon suppeneminen ja raja-arvo

Jos jokaista luonnollista lukua $n \in \mathbb{N}$ kohti annetaan yksikäsitteisesti määrätty luku $x_n \in \mathbb{R}$, saadaan (reaaliluku)jono

$$(\, x_1, x_2, x_3, \dots\,),$$

jota merkitään lyhyesti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tai $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Indeksistä n riippuvaa lukua x_n sanotaan lukujonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n:nneksi alkioksi (termiksi)*. Esimerkiksi lukujonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $x_n = \frac{1}{n^2}$, alkioita ovat

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots,$$

ja lukujonon $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n = \frac{n}{n+1}$, alkioita ovat

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots.$$

Edellä määritellyn lukujonon $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alkiot ovat hyvin lähellä lukua 0, kun n on suuri. Vastaavasti lukujonon $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alkiot ovat hyvin lähellä lukua 1, kun n on suuri. Luvut 0 ja 1 ovatkin lukujonojen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ raja-arvoja (vastaavassa järjestyksessä). Lukujonon raja-arvon matemaattinen määritelmä on kiteytynyt seuraavaan muotoon:

Määritelmä 2.1.1. Jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *suppenee* (converges) kohti raja-arvoa $x \in \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $n \geq n(\varepsilon)$ pätee

$$|x_n - x| < \varepsilon.$$

Tällöin merkitään $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Jos jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ei suppene kohti reaalista raja-arvoa, se *hajaantuu* (diverges).

Jonon raja-arvon määritelmä symbolimuodossa:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ : n \geq n(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon.$$

Esimerkki 2.1.2. Tarkastellaan jonoa $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, missä

$$x_n := \frac{1}{n}.$$

Jono näyttää suppenevan kohti lukua 0. Kokeillaan ε-ehtoa oletettuun raja-arvoon $x = 0$ arvolla $\varepsilon = \frac{1}{100}$. Nyt

$$|x_n - 0| < \frac{1}{100} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \frac{1}{100} \quad \Longleftrightarrow \quad n > 100.$$

Siis kaikilla $n = 101, 102, \dots$ pätee $|x_n - 0| < \frac{1}{100}$. Voidaan valita $n(\varepsilon) = 101$ (mikä hyvänsä suurempi luku käy myös). Tällöin arvoilla $n \geq n(\varepsilon)$ pätee $|x_n - 0| < \frac{1}{100}$.

Huomautus. (a) Määritelmässä 2.1.1 ei ole olennaista löytää parasta lukua $n(\varepsilon)$, vaan ainoastaan *jokin* vaadittavan ehdon toteuttava luku $n(\varepsilon)$. Tässä parametri ε viittaa siihen, että $n(\varepsilon)$ riippuu luvusta $\varepsilon > 0$.

(b) Raja-arvon määritelmän omaksuminen vaatii työstämistä. Kannattaa huomata, että määritelmä yo. muodossaan on vasta reilut sata vuotta vanha. Tästäkin voi päätellä, että määritelmä on ei-triviaali.

(c) Määritelmästä seuraa, että raja-arvo on yksikäsitteinen. Tämä tarkoittaa seuraavaa: Jos jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on annettu, korkeintaan yksi luku $x \in \mathbb{R}$ toteuttaa Määritelmän 2.1.1.

Todistus. Tehdään vastaoletus, että on olemassa luvut $a \neq b$ siten, että $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ ja $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Voidaan olettaa $a < b$. (Jos näin ei ole, niin luvut a ja b vaihdetaan.) Valitaan $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ ja sovelletaan raja-arvon määritelmää sekä lukuun a että lukuun b. Löydetään $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ja $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\begin{aligned} n \geq n_1(\varepsilon) &\implies |x_n - a| < \varepsilon \implies a - \tfrac{b-a}{2} < x_n < a + \tfrac{b-a}{2}, \\ n \geq n_2(\varepsilon) &\implies |x_n - b| < \varepsilon \implies b - \tfrac{b-a}{2} < x_n < b + \tfrac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

Jos nyt $n \geq \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, niin molemmat arviot ovat voimassa x_n:lle. Koska

$$a + \frac{b-a}{2} = b - \frac{b-a}{2},$$

saadaan $x_n < x_n$, mikä on ristiriita. □

Esimerkki 2.1.3. (Vakiojono) Oletetaan, että on olemassa $a \in \mathbb{R}$ siten, että $x_n = a$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Jos nimittäin $\varepsilon > 0$ on annettu, niin $|x_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis kaikki luonnolliset luvut kelpaavat luvuksi $n(\varepsilon)$ olipa ε mikä hyvänsä.

Huomautus. Jonon alkupään alkioiden perusteella ei voi sanoa mitään varmaa raja-arvosta. Olkoon esimerkiksi

$$x_n = \frac{2n^2 + 10^6 n}{3n^2}.$$

Nyt jonon ensimmäiset alkiot (termit) ovat

$$\frac{1000002}{3}, \frac{2000008}{12}, \frac{3000018}{27}, \ldots.$$

Ensimmäisten termien perusteella on vaikea päätellä, mikä raja-arvo on tai onko raja-arvoa ylipäätään olemassa. Itse asiassa

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{2}{3}.$$

Tämän perustelemiseksi on kuitenkin johdettava ensin yleisiä raja-arvon ominaisuuksia.

2.2. Jonon raja-arvoon liittyviä ominaisuuksia

Kuristusperiaate. *Oletetaan, että on olemassa* $n_0 \in \mathbb{N}$ *siten, että reaalilukujonoille* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*,* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ja* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *pätee*

(a) $x_n \leq y_n \leq z_n$ *kaikilla* $n \geq n_0$*,*

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x = \lim\limits_{n\to\infty} z_n$*.*

Tällöin $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$*.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän (oletus (b)) nojalla on olemassa $n_1(\varepsilon) \geq n_0$ siten, että $|x_n - x| < \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_1(\varepsilon)$. Vastaavasti on olemassa $n_2(\varepsilon) \geq n_0$ siten, että $|z_n - x| < \varepsilon$ kaikilla $n \geq n_2(\varepsilon)$. Valitaan $n(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$. Tällöin, jos $n \geq n(\varepsilon)$, niin

$$-\varepsilon < x_n - x < \varepsilon \quad \text{ja} \quad -\varepsilon < z_n - x < \varepsilon,$$

joten

$$-\varepsilon < x_n - x \leq y_n - x \leq z_n - x < \varepsilon.$$

Siis ehto $|y_n - x| < \varepsilon$ pätee, kun $n \geq n(\varepsilon)$. □

Olkoot $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kaksi reaalilukujonoa. Tällöin *summajono* $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja *tulojono* $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ määritellään luonnollisella tavalla, ts. summajonon n. alkio on $x_n + y_n$ ja tulojonon n. alkio on $x_n y_n$. Esimerkiksi, jos

$$x_n = \frac{1}{n^2} \quad \text{ja} \quad y_n = \frac{n}{n+1},$$

niin summajono ja tulojono ovat

$$x_n + y_n = \frac{1}{n^2} + \frac{n}{n+1} = \frac{n^3+n+1}{n^2(n+1)}$$

ja

$$x_n y_n = \left(\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Lause 2.2.1. *Olkoot* $x, y \in \mathbb{R}$ *siten, että* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *ja* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$*. Tällöin*

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$*,*

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a x_n = a x$ *kaikilla* $a \in \mathbb{R}$*,*

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = xy$*,*

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$ *jos* $y \neq 0$*.*

Lauseen 2.2.1 kohdat (a) ja (b) todistetaan luennolla. Kohtien (c) ja (d) todistukset ovat teknisempiä, ja siksi ne jätetään tässä vaiheessa lukijan oman mielenkiinnon varaan.

Todistus. (c) Raja-arvon määritelmästä seuraa helposti, että jono $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on rajoitettu. Tällöin on olemassa $M > 0$ siten, että $|y_n| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Valitaan $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ siten, että

$$n \geq n_1 \Rightarrow |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{ja} \quad n \geq n_2 \Rightarrow |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2(|x|+1)}.$$

Jos nyt $n(\varepsilon) := \max\{n_1, n_2\}$, niin kaikilla $n \geq n(\varepsilon)$ pätee kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} |x_n y_n - xy| &= |x_n y_n - x y_n + x y_n - xy| = |y_n(x_n - x) + x(y_n - y)| \\ &\leq |y_n||x_n - x| + |x||y_n - y| \leq M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |x| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|x|+1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tämä todistaa väitteen.

(d) Todistetaan ensin implikaatio

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \implies \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 1. \tag{2.1}$$

Olkoon tätä varten $0 < \varepsilon < 1$. Valitaan $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_n - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $n \geq n(\varepsilon)$. Arvoilla $n \geq n(\varepsilon)$ pätee $|x_n - 1| < \frac{1}{2}$, eli $\frac{1}{2} < x_n < \frac{3}{2}$. Näin ollen arvoilla $n \geq n(\varepsilon)$ saadaan

$$\left|\frac{1}{x_n} - 1\right| = \left|\frac{1 - x_n}{x_n}\right| = \frac{|1 - x_n|}{|x_n|} < 2|1 - x_n| < \varepsilon,$$

mikä todistaa väitteen (2.1). Ehtoa (2.1) käyttäen yleinen väite saadaan seuraavalla tavalla. Havaitaan ensin, että kohdan (b) nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{y} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y} \cdot y_n = \frac{1}{y} \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{y} \cdot y = 1.$$

Näin ollen kohtien (b), (c) sekä implikaation (2.1) perusteella saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y} \cdot \frac{y}{y_n} \cdot x_n = \frac{1}{y} \cdot 1 \cdot x = \frac{x}{y},$$

mikäli $y \neq 0$. □

2.3. Jonon monotonisuus

Määritelmä 2.3.1. Lukujono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on

(a) *rajoitettu* (bounded), jos on olemassa $M > 0$ siten, että $|x_n| \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

(b) *kasvava* (increasing), jos $x_n \leq x_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$,

(c) *vähenevä* (decreasing), jos $x_n \geq x_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Lukujono on *monotoninen* (monotonic), jos se on joko kasvava tai vähenevä.

Lisäksi määritellään: Lukujono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on *aidosti kasvava* (vast. *aidosti vähenevä*) , jos ehdossa (b) (vast. ehdossa (c)) on aito epäyhtälö. Lukujono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on *aidosti monotoninen*, jos se on joko aidosti vähenevä tai aidosti kasvava. Lukujono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on *ylhäältä rajoitettu* (vast. *alhaalta rajoitettu*), jos on olemassa $a \in \mathbb{R}$ siten, että $x_n \leq a$ (vast. $x_n \geq a$) kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Esimerkki 2.3.2. Olkoon $x_n = \frac{n}{n+1}$. Tällöin

$$\begin{aligned} x_n \le x_{n+1} &\iff \frac{n}{n+1} \le \frac{n+1}{n+2} \\ &\iff n(n+2) \le (n+1)^2 \\ &\iff n^2 + 2n \le n^2 + 2n + 1 \\ &\iff 0 \le 1, \end{aligned}$$

joten $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on kasvava. Koska $x_n \le 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on myös ylhäältä rajoitettu. Kasvavuuden voi perustella myös sillä, että funktion $f(x) = \frac{x}{x+1}$ derivaatta $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ on positiivinen arvoilla $x > 0$.

Lukujonojen yhteydessä hyödynnetään täydellisyysaksiomaa usein seuraavasti:

Lause 2.3.3. *Jos lukujono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on kasvava ja ylhäältä rajoitettu, niin on olemassa raja-arvo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ja*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{\, x_n : n \in \mathbb{N} \,\}.$$

Todistus. Täydellisyysaksioman nojalla $G = \sup\{\, x_n : n \in \mathbb{N} \,\} \in \mathbb{R}$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Supremumin määritelmän mukaan $G - \varepsilon$ ei ole joukon $E := \{\, x_n : n \in \mathbb{N} \,\}$ yläraja, joten on olemassa $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että $x_{n(\varepsilon)} \in E$ ja

$$x_{n(\varepsilon)} > G - \varepsilon.$$

Jos nyt $n > n(\varepsilon)$, niin jonon kasvavuuden perusteella

$$x_{n(\varepsilon)} \le x_{n(\varepsilon)+1} \le \cdots \le x_n$$

ja siis

$$G - \varepsilon < x_n \le G < G + \varepsilon$$

kaikilla $n \ge n(\varepsilon)$. Näin ollen $|x_n - G| < \varepsilon$ kaikilla $n \ge n(\varepsilon)$, eli väite pätee. □

Esimerkki 2.3.4. (a) Tarkastellaan esimerkiksi lukujonoa

$$1.2, 1.24, 1.245, 1.2459, 1.24596, \ldots,$$

missä jonon alkio x_n saadaan arpomalla umpimähkään lukuja $1, \ldots, 9$ n:nnen desimaalin paikalle. Tässä desimaalimerkinnällä tarkoitetaan esimerkiksi

$$1.245 := 1 + 2 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}.$$

Selvästi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on aina kasvava ja ylhäältä rajoitettu jono rationaalilukuja, joten Lauseen 2.3.3 mukaan

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

on olemassa. Käytännön laskuissa varsinkin irrationaalilukuja x *approksimoidaan likiarvoilla*, eli luvuilla x_n tai niiden pyöristyksillä. Voidaan osoittaa, että näin muodostettu raja-arvo x on irrationaaliluku jos ja vain jos desimaaliesitys on jaksoton (sama numerosarja ei toistu loputtomiin mistään indeksistä lähtien).

(b) Olkoon

$$x_n := 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Lukujono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on selvästi kasvava, ja vertaamalla sitä suppenevassa geometrisessa sarjassa esiintyvään lukujonoon, voidaan päätellä, että lukujono on rajoitettu (tarkka perustelu sivuutetaan). Raja-arvoa $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ kutsutaan *Neperin luvuksi* e. Neperin luku saadaan myös kasvavan jonon

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

raja-arvona, ks. Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskenta I, ss. 45–47.

Lauseen 2.3.3 vastine pätee luonnollisesti myös infimumille. Todistus on täysin analoginen kasvavaa jonoa koskevan todistuksen kanssa:

Lause 2.3.5. *Jos lukujono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on vähenevä ja alhaalta rajoitettu, niin on olemassa raja-arvo $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ ja*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{\, x_n : n \in \mathbb{N} \,\} \in \mathbb{R}.$$

2.4. Rekursiiviset jonot

Rekursiivisessa jonossa jonon termi määritellään jonon aikaisempien termien avulla. Yksinkertaisimmassa tapauksessa jonon termi x_{n+1} riippuu vain termistä x_n, mutta on myös mahdollista, että x_{n+1} riippuu useammasta kuin yhdestä edeltävästä termistä. Esimerkiksi klassinen *Fibonaccin lukujono* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ määritellään rekursiivisesti asettamalla

$$x_1 = x_2 = 1 \quad \text{ja} \quad x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jonon ensimmäiset alkiot ovat siis $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$

Rekursiivisen jonon käsittely perustuu usein induktioperiaatteeseen.

Kultaisella luvulla (kultaisella suhteella) α tarkoitetaan suhdeyhtälön

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \iff x^2 = x + 1$$

positiivista ratkaisua

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Kultaisen luvun α ja Fibonaccin lukujen x_n välillä pätee epäyhtälö

$$x_n > \alpha^{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Todistus. Osoitetaan väite induktioperiaatteella.

(1) On helppo tarkastaa, että väite pätee indeksin arvoilla $n = 3, 4$.

(2) Oletetaan, että väite pätee indeksin arvoilla $3 \leq k \leq n$, missä $n \geq 4$. Tällöin

$$x_{n+1} = x_n + x_{n-1} > \alpha^{n-2} + \alpha^{n-3} = \alpha^{n-3}(\alpha+1) = \alpha^{n-3}\alpha^2 = \alpha^{(n+1)-2}.$$

Induktioperiaatteen mukaan väite pätee kaikilla $n \geq 3$. □

Esimerkki 2.4.1. Oletetaan, että olemme todistaneet Fibonaccin lukujonon alkioille x_n raja-arvon

$$x = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}$$

olemassaolon. Jakamalla saadaan rekursiokaavasta

$$\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}} = 1 + \frac{x_n}{x_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\frac{x_{n+1}}{x_n}},$$

joten ottamalla raja-arvot puolittain ja soveltamalla raja-arvon laskusääntöjä (Lause 2.2.1), saadaan

$$x = 1 + \frac{1}{x} \iff x^2 = x + 1.$$

Siis kultainen luku saadaan ko. suhteen raja-arvona (kunhan todistetaan ensin raja-arvon olemassaolo).

2.5. Hajaantuvat jonot

Tarkastellaan esimerkkejä *hajaantuvista* (ts. ei-suppenevista) jonoista. Hajaantumisen määritelmä saadaan kääntämällä raja-arvon määritelmä negaatiokseen. Toisin sanoen, jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ei suppene kohti pistettä $x \in \mathbb{R}$, jos on olemassa luku $\varepsilon > 0$ siten, että $|x_n - x| > \varepsilon$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Seuraava *Cauchyn ehto* antaa tehokkaamman tavan perustella hajaantuminen:

Cauchyn ehto. *Jos lukujonolla* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *on raja-arvo* x*, niin kaikilla* $\varepsilon > 0$ *on olemassa* $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *siten, että*

$$n, m \geq n(\varepsilon) \implies |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa $n(\varepsilon) > 0$ siten, että $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $n \geq n(\varepsilon)$. Jos siis $n, m \geq n(\varepsilon)$, niin kolmioepäyhtälön mukaan

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x_m - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ja väite on todistettu. □

Huomautus. Cauchyn ehto ei päde, jos on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että jokaista $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vastaa $m, n \geq n(\varepsilon)$, joille

$$|x_n - x_m| \geq \varepsilon.$$

Tällöin jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hajaantuu.

Huomautus. Hajaantuvia jonoja on kahta tyyppiä:

(1) Jonot, joilla on raja-arvo $+\infty$ tai raja-arvo $-\infty$.

(2) Jonot, joilla ei ole äärellistä eikä ääretöntä raja-arvoa.

Äärettömät raja-arvot määritellään seuraavasti:

Määritelmä 2.5.1. Jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *kasvaa rajatta*, merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$, jos jokaista lukua $M > 0$ vastaa $n(M) \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $n \geq n(M)$ pätee

$$x_n > M.$$

Vastaavasti, jono $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *vähenee rajatta*, merkitään $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, jos jokaista lukua $m < 0$ vastaa $n(m) \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $n \geq n(m)$ pätee

$$x_n < m.$$

Huomautus. Olkoon $P(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ polynomi, jonka aste on $k \in \mathbb{N}$. Tällöin $a_k \neq 0$. On helppo todistaa määritelmistä lähtien:

(1) Jos $a_k > 0$, niin $\lim_{n\to\infty} P(n) = +\infty$.

(2) Jos $a_k < 0$, niin $\lim_{n\to\infty} P(n) = -\infty$.

Harjoitustehtävänä osoitetaan, että myös äärettömille raja-arvoille ovat voimassa seuraavat kuristusperiaatteet:

Kuristusperiaate raja-arvolle $+\infty$. *Oletetaan, että on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että reaalilukujonoille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pätee*

(a) $x_n \leq y_n$ *kaikilla* $n \geq n_0$;

(b) $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Tällöin $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$.

Kuristusperiaate raja-arvolle $-\infty$. *Oletetaan, että on olemassa $n_0 \in \mathbb{N}$ siten, että reaalilukujonoille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pätee*

(a) $x_n \geq y_n$ *kaikilla* $n \geq n_0$;

(b) $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Tällöin $\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$.

Esimerkki 2.5.2. Voidaan todistaa tuloksia, jotka yhdistävät äärellisen ja äärettömän raja-arvon. Olkoon esimerkiksi $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Osoitetaan, että tällöin $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $M = \frac{1}{\varepsilon}$, jolloin oletuksen mukaan löytyy $n(M) \in \mathbb{N}$ siten, että $x_n > M = \frac{1}{\varepsilon}$ kaikilla $n \geq n(M)$. Mutta nyt

$$\left|\frac{1}{x_n} - 0\right| = \frac{1}{x_n} < \frac{1}{M} = \varepsilon$$

kaikilla $n \geq n(M)$.

3. Reaalimuuttujan funktiot

3.1. Funktio, funktion monotonisuus ja yhdistetty funktio

Olkoot $A \subset \mathbb{R}$ ja $B \subset \mathbb{R}$. *Kuvaus (funktio)* $f : A \to B$ on sääntö, joka liittää jokaiseen alkioon $x \in A$ yksikäsitteisen alkion $f(x) \in B$. Lukua $f(x)$ kutsutaan luvun x *kuvaksi*. Jos $f(x) = y$, niin lukua x sanotaan luvun y *alkukuvaksi*. Joukkoa A kutsutaan *määrittelyjoukoksi (lähtöjoukoksi)* ja joukkoa B kutsutaan *maalijoukoksi*.

Jos $f : A \to B$ on kuvaus sekä $A_1 \subset A$ ja $B_1 \subset B$, niin B:n osajoukkoa

$$f(A_1) := \{\, y \in B : y = f(x) \text{ jollekin } x \in A_1 \,\}$$

kutsutaan A_1:n *kuvajoukoksi* ja A:n osajoukkoa

$$f^{-1}(B_1) := \{\, x \in A : f(x) \in B_1 \,\}$$

kutsutaan B_1:n *alkukuvajoukoksi*. Funktion $f : A \to B$ *kuvaajalla* tarkoitetaan tason $\mathbb{R}^2$ osajoukkoa

$$\{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A,\ y = f(x) \,\}.$$

Esimerkki 3.1.1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaus $f(x) = x^2$ ja olkoot $A_1 =]-\frac{1}{2}, 1[$, $B_1 = \{2, 3\}$. Tällöin $f(A_1) = [0, 1[$ ja $f^{-1}(B_1) = \{\, \pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{3} \,\}$.

Määritelmä 3.1.2. Kuvaus $f : A \to B$ on

(a) *kasvava* (vast. *aidosti kasvava*)), jos kaikilla $x, y \in A$, $x < y$, pätee $f(x) \le f(y)$ (vast. $f(x) < f(y)$);

(b) *vähenevä* (vast. *aidosti vähenevä*)), jos kaikilla $x, y \in A$, $x < y$, pätee $f(x) \ge f(y)$ (vast. $f(x) > f(y)$);

(c) *monotoninen* (vast. *aidosti monotoninen*), jos f on kasvava tai vähenevä (vast. aidosti kasvava tai aidosti vähenevä).

Lemma 3.1.3. *Olkoon $f : A \to B$ kuvaus.*

(a) Jos f on aidosti kasvava, niin $x < y$ jos ja vain jos $f(x) < f(y)$.

(b) Jos f on aidosti vähenevä, niin $x < y$ jos ja vain jos $f(x) > f(y)$.

Todistus. Todistetaan väite (a). Implikaatio vasemmalta oikealle pätee määritelmän mukaan. Käänteisen implikaation todistamiseksi tehdään antiteesi $x \ge y$. Tapauksessa $x = y$ pätee $f(x) = f(y)$ (ristiriita) ja tapauksessa $x > y$ pätee aidon kasvavuuden nojalla $f(x) > f(y)$ (ristiriita). Antiteesi oli siis väärä, joten $x < y$.

Väite (b) jätetään harjoitustehtäväksi. □

Määritelmä 3.1.4. Olkoot A, B ja C epätyhjiä $\mathbb{R}$:n osajoukkoja ja olkoot $f : A \to B$ ja $g : B \to C$ kuvauksia. Tällöin sääntö

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)), \quad x \in A,$$

määrittelee kuvauksen $g \circ f : A \to C$ (*yhdistetty kuvaus*).

Esimerkki 3.1.5. Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kuvaukset

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = x^2, \quad h(x) = |x|.$$

Tällöin

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2) = x^2 + 1, \\
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1, \\
(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(x^2 + 2x + 1) = |x^2 + 2x + 1|.
\end{aligned}$$

Siis kuvausten yhdistäminen *ei ole vaihdannainen* operaatio, eli *voi olla*

$$(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x).$$

Huomaa, että yhdistettäessä useampi kuin kaksi kuvausta ei tarvita sulkuja määräämään laskujärjestystä, koska kuvausten yhdistäminen *on liitännäinen* operaatio; yleisesti pätee

$$\begin{aligned}
(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))), \\
((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x)),
\end{aligned}$$

eli $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (ovat samat kuvaukset).

3.2. Injektiivisyys, surjektiivisuus ja bijektiivisyys.

Määritelmä 3.2.1. Kuvaus $f : A \to B$ on

(a) *injektio*, jos kaikilla $x, y \in A$, $x \neq y$, pätee $f(x) \neq f(y)$;

(b) *surjektio*, jos jokaista $y \in B$ vastaa $x \in A$ siten, että $f(x) = y$;

(c) *bijektio*, jos f on sekä injektio että surjektio.

Esimerkki 3.2.2. Kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2,$$

ei ole injektio, sillä $f(-1) = f(1)$. f ei myöskään ole surjektio, sillä $f(x) \neq -1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, eli luvulla -1 ei ole alkukuvaa.

Surjektiivisuus tarkoittaa siis sitä, että jokaisella maalijoukon alkiolla on *ainakin* yksi alkukuva määrittelyjoukossa. Injektiivisyys puolestaan sitä, että jokaisella maalijoukon alkiolla on *korkeintaan* yksi alkukuva määrittelyjoukossa. Bijektiivisyys tarkoittaa siis sitä, että jokaisella maalijoukon alkiolla on *täsmälleen* yksi alkukuva määrittelyjoukossa.

Huomautus. Ekvivalentisti, $f : A \to B$ on injektio jos implikaatio

$$x, y \in A \text{ ja } f(x) = f(y) \implies x = y \tag{3.1}$$

pätee. Koska implikaatio $x = y \Longrightarrow g(x) = g(y)$ pätee kaikille kuvauksille g, niin f on injektio täsmälleen silloin, kun ekvivalenssi

$$x = y \iff f(x) = f(y)$$

pätee kaikille $x, y \in A$.

Esimerkki 3.2.3. Osoitetaan, että kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x+3$, on injektio. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$ siten, että

$$f(x) = 2x + 3 = 2y + 3 = f(y).$$

Tästä saadaan $2x = 2y$ ja edelleen $x = y$. Siis f on injektio.

Injektiivisyys on surjektiivisuutta olennaisempi ominaisuus:

Huomautus. Olkoon $f : A \to B$ injektio. Tällöin kuvaus $f : A \to f(A)$ on sekä injektio että surjektio, sillä jokaista $y \in f(A)$ vastaa kuvajoukon määritelmän mukaan $x \in A$ siten, että $f(x) = y$. Siis kuvaus $f : A \to f(A)$ on bijektio, jos kuvaus $f : A \to B$ on injektio.

Tällä kurssilla injektiivisyys päätellään yleensä aidon monotonisuuden avulla:

Lemma 3.2.4. *Olkoon $f : A \to B$ aidosti monotoninen. Tällöin f on injektio.*

Todistus. Oletetaan, että f on aidosti kasvava. Injektiivisyyden todistamiseksi olkoot $x, y \in A$, $x \neq y$. Tällöin joko $x < y$ tai $x > y$. Jos $x < y$, niin aidon kasvavuuden määritelmän mukaan $f(x) < f(y)$. Jos taas $x > y$, niin aidon kasvavuuden määritelmän mukaan $f(x) > f(y)$. Joka tapauksessa $f(x) \neq f(y)$, eli f on injektio.

Aidosti vähenevän funktion injektiivisyys todetaan vastaavasti (HT). □

3.3. Käänteiskuvaus

Olkoon $f : A \to B$ injektio. Tällöin jokaista kuvajoukon $f(A)$ alkiota $y \in f(A)$ vastaa täsmälleen yksi alkukuva lähtöjoukossa A. Tälle alkukuvalle käytetään merkintää $f^{-1}(y)$. Nyt sääntö $y \mapsto f^{-1}(y)$ määrittelee kuvauksen $f(A) \to A$. Tätä kuvausta sanotaan kuvauksen f *käänteiskuvaukseksi*, ja sille käytetään merkintää f^{-1}. Jos $f : A \to B$ on bijektio, niin käänteiskuvauksen f^{-1} määrittelyjoukko on B ja maalijoukko A.

Jos bijektio $f : A \to B$ on määritelty analyyttisella lausekkeella, niin käänteiskuvauksen lauseke saadaan selville, mikäli yhtälöstä $f(x) = y$, $y \in B$, voidaan ratkaista x yksikäsitteisesti y:n avulla.

Esimerkki 3.3.1. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3$. Tässä tapauksessa kuvauksen bijektiivisyys ja käänteiskuvauksen lauseke voidaan todeta yhdellä päättelyllä. Pyritään todistamaan, että kyseessä on surjektio. Olkoon tätä varten $y \in \mathbb{R}$. Asetetaan $f(x) = 2x + 3 = y$, ja ratkaistaan x y:n funktiona. Koska

$$2x + 3 = y \iff 2x = y - 3 \iff x = \frac{1}{2}(y - 3), \tag{3.2}$$

havaitaan, että $\frac{1}{2}(y-3)$ on luvun $y \in \mathbb{R}$ alkukuva. Mutta ekvivalenssiketju (3.2) osoittaa, että $\frac{1}{2}(y-3)$ on myöskin luvun $y \in \mathbb{R}$ *ainoa* alkukuva. Tämä riittää perustelemaan myös injektiivisyyden ja havaitaan, että *injektiivisyyden erillinen todistaminen on tässä tapauksessa tarpeetonta.*

Erityisesti käänteiskuvaus $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ saadaan säännöstä $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-3)$. Tässä käänteiskuvauksen muuttujaa voitaisiin merkitä y:llä, mutta siihen ei ole erityistä tarvetta. Yleensä kuvauksen ja sen käänteiskuvauksen lausekkeissa käytetäänkin samaa muuttujamerkintää.

Käänteiskuvauksen geometrinen tulkinta. Jos $f : A \to B$ on bijektio, niin funktion f kuvaaja ja käänteisfunktion f^{-1} kuvaaja ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen. Nimittäin f:n kuvaaja on joukko

$$\{\, (x, f(x)) : x \in A \,\}$$

ja käänteisfunktion f^{-1} kuvaaja on joukko

$$\{\, (f(x), x) : x \in A \,\}.$$

Toisaalta pisteet $(x_0, f(x_0))$ ja $(f(x_0), x_0)$ ovat toistensa peilikuvia suoran $y = x$ suhteen kaikilla $x_0 \in A$:

(1) Pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(f(x_0), x_0)$ kautta kulkeva suora on kohtisuorassa suoraan $y = x$ nähden, sillä näiden pisteiden kautta kulkevan suoran kulmakerroin on

$$\frac{f(x_0) - x_0}{x_0 - f(x_0)} = -1.$$

Huomaa, että suorat l_1 ja l_2 ovat kohtisuorassa täsmälleen silloin kun niiden vastaaville kulmakertoimille k_1 ja k_2 pätee $k_1 k_2 = -1$.

(2) Pisteiden $(x_0, f(x_0))$ ja $(f(x_0), x_0)$ välisen janan keskipiste

$$\left(\frac{x_0 + f(x_0)}{2}, \frac{f(x_0) + x_0}{2}\right) = \left(\frac{x_0 + f(x_0)}{2}, \frac{x_0 + f(x_0)}{2}\right)$$

sijaitsee suoralla $y = x$.

Huomautus. Olkoon $f : A \to B$ bijektio. Tällöin

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x \quad \text{kaikilla } x \in B$$

ja

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad \text{kaikilla } x \in A$$

suoraan käänteiskuvauksen määritelmän mukaan. Näitä ehtoja voi käyttää sen tarkastamiseen, onko käänteiskuvauksen lauseke oikein. Esimerkiksi kuvauksille $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ja $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$ pätee

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{x}{1-x}\right) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 + (\frac{x}{1-x})} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1-x+x}{1-x}} = x, \quad x \neq 1,$$

ja

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(\frac{x}{1+x}\right) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 - (\frac{x}{1+x})} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{1+x-x}{1+x}} = x, \quad x \neq -1.$$

Lause 3.3.2. *Olkoon $f : A \to B$ kuvaus.*

(a) Jos f on aidosti kasvava, niin käänteiskuvaus $f^{-1} : f(A) \to A$ on aidosti kasvava.

(b) Jos f on aidosti vähenevä, niin käänteiskuvaus $f^{-1} : f(A) \to A$ on aidosti vähenevä.

3.4. Funktion raja-arvo

Differentiaali- ja integraalilaskennan uranuurtajina pidetään sir Isaac Newtonia (1642–1727) ja Gottfried Leibnizia (1646–1716). Pitkälle 1800-luvulle saakka differentiaali- ja integraalilaskennan kehitystä haittasi se, että raja-arvon käsitteelle ei ollut olemassa kunnollista määritelmää. Kunnia raja-arvon epsilon-määritelmän keksimisestä annetaan yleensä Augustin Cauchylle (1789–1857).

Esimerkki 3.4.1. Painovoimalain mukaan kappale putoaa vapaassa pudotuksessa siten, että ajassa $t > 0$ kuljettu matka $s(t)$ saadaan kaavasta

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

missä g on normaaliputoamiskiihtyvyys $g \approx 9.8\frac{m}{s^2}$. Vapaalla pudotuksella tarkoitetaan sitä, että ainoa vaikuttava voima on maan vetovoima. Esimerkiksi pudotettaessa raskas kivi alas jyrkänteeltä, ensimmäisten sekuntien aikana ilmanvastuksen merkitys on olematon ja kyse on olennaisesti vapaasta pudotuksesta.

Miten saadaan nopeus esimerkiksi hetkellä $t = 2$ sekuntia? Tunnetusti keskimääräinen nopeus saadaan kaavasta $v = \frac{s}{t}$, joten erotusosamäärä

$$\frac{s(2) - s(t)}{2 - t} = \frac{s(t) - s(2)}{t - 2}$$

on likiarvo hetkelliselle nopeudelle hetkellä $t = 2$ mikäli $t \neq 2$ on likimäärin 2. Likiarvo on sitä parempi, mitä pienempi on väli $t - 2$. Tämän vuoksi on luonnollista tulkita nopeus hetkellä $t = 2$ erotusosamäärän raja-arvoksi, kun t lähestyy ajanhetkeä 2.

Raja-arvon määritelmää varten sovitaan ensin, mitä tarkoitetaan pisteen ympäristöllä. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ ja $r > 0$. Tällöin *pisteen* x_0 r*-säteisellä (avoimella) ympäristöllä* $B(x_0, r)$ tarkoitetaan avointa väliä

$$B(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r \} =]x_0 - r, x_0 + r[,$$

ja *pisteen* x_0 r*-säteisellä punkteeratulla ympäristöllä* $B'(x_0, r)$ tarkoitetaan punkteerattua avointa väliä

$$B'(x_0, r) = \{ x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < r \} =]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}.$$

Määriteltäessä funktion f raja-arvoa pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$ vaatimuksena on, että funktio f on määritelty *jossakin* pisteen x_0 punkteeratussa ympäristössä $B'(x_0, r)$. Esimerkiksi derivaatan määritelmän yhteydessä erotusosamäärää ei ole määritelty "nollaerotukselle".

Määritelmä 3.4.2. Funktiolla $f : B'(x_0, r) \to \mathbb{R}$ on pisteessä x_0 *raja-arvo* $a \in \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa luku $\delta > 0$ siten, että

$$0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Huomautus. (a) Raja-arvon määritelmästä seuraa välittömästi, että

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \iff \lim_{x \to x_0} (f(x) - a) = 0.$$

(b) Määritelmästä seuraa, että raja-arvo on yksikäsitteinen. Tällä tarkoitetaan implikaatiota: Jos $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ ja $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b$, niin $a = b$.

Todistus. Tehdään antiteesi $a \neq b$, ja oletetaan, että $a < b$. Valitaan $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$, ja sovelletaan raja-arvon määritelmää sekä lukuun a että lukuun b. Löydetään $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ siten, että

$$\begin{aligned} x \in B'(x_0, \delta_1) &\implies |f(x) - a| < \varepsilon \implies a - \tfrac{b-a}{2} < f(x) < a + \tfrac{b-a}{2}, \\ x \in B'(x_0, \delta_2) &\implies |f(x) - b| < \varepsilon \implies b - \tfrac{b-a}{2} < f(x) < b + \tfrac{b-a}{2}. \end{aligned}$$

Jos nyt $\delta := \min\{ \delta_1, \delta_2 \}$ ja $x \in B'(x_0, \delta)$, niin kummatkin arviot oikealla puolella ovat voimassa, eli

$$\frac{a+b}{2} = b - \frac{b-a}{2} < f(x) < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

mikä on ristiriita. □

3.5. Raja-arvon laskusääntöjä

Funktion raja-arvolle pätevät samat summaa, tuloa ja osamäärää koskevat laskusäännöt kuin lukujonon raja-arvolle.

Lause 3.5.1. *Olkoot $f : B'(x_0, r_1) \to \mathbb{R}$ ja $g : B'(x_0, r_2) \to \mathbb{R}$ funktioita siten, että*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \quad \textit{ja} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = b.$$

Tällöin

(i) $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = a + b,$

(ii) $\lim_{x \to x_0} cf(x) = ca$ *kaikilla* $c \in \mathbb{R},$

(iii) $\lim_{x \to x_0} f(x)g(x) = ab,$

(iv) Jos $b \neq 0$, *niin* $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}.$

Todistus. Kohdat (i) ja (ii) todistetaan luennolla.

(iii) Raja-arvon määritelmästä seuraa, että on olemassa $\delta_1 > 0$ siten, että $|g(x)| \leq |b| + 1$ kaikilla $x \in B'(x_0, \delta_1)$. Valitaan $\delta_2 > 0$ ja $\delta_3 > 0$ siten, että

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \implies |f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} \quad \text{ja} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_3 \implies |g(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)}.$$

Jos nyt $\delta := \min\{\, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \,\}$, niin kaikilla $x \in B'(x_0, \delta)$ pätee kolmioepäyhtälön nojalla

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - ab| &= |f(x)g(x) - ag(x) + ag(x) - ab| = |g(x)(f(x) - a) + a(g(x) - b)| \\ &\leq |g(x)||f(x) - a| + |a||g(x) - b| \leq (|b| + 1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|b| + 1)} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|a| + 1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Tämä todistaa väitteen.

(iv) Todistetaan ensin implikaatio

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 1 \implies \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 1. \tag{3.3}$$

Olkoon tätä varten $0 < \varepsilon < 1$, ja valitaan $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $x \in B'(x_0, \delta)$. Tällöin arvoilla $x \in B'(x_0, \delta)$ pätee $|f(x) - 1| < \frac{1}{2}$, eli $\frac{1}{2} < f(x) < \frac{3}{2}$. Näin ollen kaikilla $x \in B'(x_0, \delta)$ on voimassa

$$\left| \frac{1}{f(x)} - 1 \right| = \left| \frac{1 - f(x)}{f(x)} \right| = \frac{|1 - f(x)|}{|f(x)|} < 2|1 - f(x)| < \varepsilon,$$

mikä todistaa väitteen (3.3). Ehtoa (3.3) käyttäen yleinen väite saadaan havaitsemalla ensin, että kohdan (ii) nojalla

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{b} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{b} \cdot g(x) = \frac{1}{b} \lim_{x \to x_0} g(x) = \frac{1}{b} \cdot b = 1.$$

Näin ollen kohtien (ii), (iii) sekä implikaation (3.3) perusteella saadaan

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{b} \cdot \frac{b}{g(x)} \cdot f(x) = \frac{1}{b} \cdot 1 \cdot a = \frac{a}{b},$$

mikäli $b \neq 0$. □

Huomautus. Olkoon $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ polynomi, eli muotoa

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

missä $a_n \neq 0$. Tällöin
$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$
kaikilla $x_0 \in \mathbb{R}$. Siis esimerkiksi
$$\lim_{x \to 3} (x^3 + 2x + 1) = 3^3 + 2 \cdot 3 + 1 = 34.$$
Emme todista väitettä suoraan määritelmää käyttäen, sillä se saadaan kätevämmin sivutuotteena Luvun 5 tuloksista, joiden mukaan polynomi on kaikkialla derivoituva, ja annetussa pisteessä derivoituva on funktio on jatkuva kyseisessä pisteessä.

Olkoon edelleen R rationaalifunktio, eli muotoa
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$
missä $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ovat polynomeja. Olkoon $x_0 \in \mathbb{R}$ siten, että $Q(x_0) \neq 0$. Tällöin Lauseen 3.5.1 kohdan (iv) mukaan
$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \frac{\lim_{x \to x_0} P(x)}{\lim_{x \to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = R(x_0).$$
Esimerkiksi
$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x + 5}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{1^3 + 2 \cdot 1 + 5}{1^4 + 1^2 + 1} = \frac{8}{3}.$$

Kuristusperiaatteesta voidaan todistaa myös seuraava versio, joka on analoginen lukujonojen kuristusperiaatteen kanssa:

Lause 3.5.2. *Olkoot $f, g, h : B'(x_0, r) \to \mathbb{R}$ funktioita siten, että*

(a) $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *kaikilla* $x \in B'(x_0, r)$,

(b) $\lim_{x \to x_0} f(x) = a = \lim_{x \to x_0} h(x)$.

Tällöin
$$\lim_{x \to x_0} g(x) = a.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Raja-arvo-oletusten mukaan on olemassa $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ siten, että
$$\begin{aligned} x \in B'(x_0, \delta_1) &\implies |f(x) - a| < \varepsilon \implies a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon, \\ x \in B'(x_0, \delta_2) &\implies |h(x) - a| < \varepsilon \implies a - \varepsilon < h(x) < a + \varepsilon. \end{aligned}$$
Valitaan $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$, jolloin kaikilla $x \in B'(x_0, \delta)$ pätee
$$a - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq a + \varepsilon.$$
Siis $|g(x) - a| < \varepsilon$ kaikilla $x \in B'(x_0, \delta)$, ja väite seuraa. □

Raja-arvo säilyy funktioita yhdistettäessä seuraavasti:

Lause 3.5.3. *Olkoon* $\lim_{y \to y_0} g(y) = a$. *Tällöin*

(i) $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = a$ *jos* $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$;

(ii) $\lim_{n \to \infty} g(x_n) = a$ *jos* $\lim_{n \to \infty} x_n = y_0$.

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta_1 > 0$ siten, että

$$y \in B'(y_0, \delta_1) \implies |g(y) - a| < \varepsilon.$$

Valitaan edelleen $\delta_2 > 0$ siten, että

$$x \in B'(x_0, \delta_2) \implies |f(x) - y_0| < \delta_1.$$

Siis

$$x \in B'(x_0, \delta_2) \implies |f(x) - y_0| < \delta_1 \implies |g(f(x)) - a| < \varepsilon.$$

Tämä todistaa väitteen (i).

Väitteen (ii) todistamiseksi valitaan $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että

$$n \geq n(\varepsilon) \implies |x_n - y_0| < \delta_1.$$

Siis

$$n \geq n(\varepsilon) \implies |x_n - y_0| < \delta_1 \implies |g(x_n) - a| < \varepsilon.$$

Tämä todistaa väitteen (ii). □

Lemma 3.5.4. *Olkoon* $x_0 > 0$. *Tällöin*

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}. \tag{3.4}$$

Todistus. Tulos saadaan sivutuotteena myöhemmin tarkasteltavista käänteiskuvausta koskevista lauseista. Väite on toisaalta helppo todistaa suoraan määritelmästä. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja oletetaan, että $|x - x_0| < \frac{x_0}{2}$. Tällöin $\sqrt{x} \geq \sqrt{\frac{x_0}{2}}$, joten

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leq \frac{|x - x_0|}{\sqrt{\frac{x_0}{2}} + \sqrt{x_0}} < \varepsilon,$$

mikäli ehto $|x - x_0| < \varepsilon(\sqrt{\frac{x_0}{2}} + \sqrt{x_0})$ $(= \delta)$ pätee. Riittää siis valita

$$\delta := \min\left\{\frac{x_0}{2}, \varepsilon\left(\sqrt{\frac{x_0}{2}} + \sqrt{x_0}\right)\right\},$$

sillä silloin ehdosta $|x - x_0| < \delta$ seuraa, että $|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$. □

3.6. Toispuoleiset raja-arvot

Määritelmä 3.6.1. Olkoon $r > 0$. Funktiolla $f :]x_0 - r, x_0[\to \mathbb{R}$ on *vasemmanpuoleinen raja-arvo* $a \in \mathbb{R}$ pisteessä x_0, merkitään

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a,$$

jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$x \in]x_0 - \delta, x_0[\implies |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Vastaavasti funktiolla $f :]x_0, x_0 + r[\to \mathbb{R}$ on *oikeanpuoleinen raja-arvo* $a \in \mathbb{R}$ pisteessä x_0, merkitään

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = a,$$

jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$x \in]x_0, x_0 + \delta[\implies |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Huomautus. Jatkossa pidetään tunnettuna, että myös toispuoleiset raja-arvot toteuttavat Lauseiden 3.5.1 ja 3.5.2 vastineet. Näiden todistamiseksi riittää muuntaa todistuksissa δ-ehdot toispuoleisiksi.

Lemma 3.6.2. *Funktiolle $f : B'(x_0, r) \to \mathbb{R}$ pätee*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a$$

jos ja vain jos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a \quad \textit{ja} \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = a.$$

Todistus. Implikaatio vasemmalta oikealle on triviaali. Käänteisen implikaation todistamiseksi olkoon $\varepsilon > 0$. Toispuoleisten raja-arvojen määritelmistä seuraa, että on olemassa $\delta_1 > 0$ ja $\delta_2 > 0$ siten, että

$$\begin{aligned} x_0 < x < x_0 + \delta_1 &\implies |f(x) - a| < \varepsilon, \\ x_0 - \delta_2 < x < x_0 &\implies |f(x) - a| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Jos $\delta := \min\{\, \delta_1, \delta_2 \,\}$, niin oletuksesta $0 < |x - x_0| < \delta$ seuraa, että $|f(x) - a| < \varepsilon$. □

Esimerkki 3.6.3. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{kun } x > 1 \\ -x^3 - 3x + a, & \text{kun } x < 1, \end{cases}$$

missä $a \in \mathbb{R}$ on vakio. Millä vakion $a \in \mathbb{R}$ arvoilla raja-arvo $\lim_{x \to 1} f(x)$ on olemassa?

Ratkaisu. Lemman 3.6.2 nojalla kyseinen raja-arvo on voimassa täsmälleen silloin, kun

$$\lim_{x \to 1^-} (-x^3 - 3x + a) = \lim_{x \to 1} (-x^3 - 3x + a) = -4 + a$$

ja

$$\lim_{x \to 1^+} (x^2 + 2x) = \lim_{x \to 1} (x^2 + 2x) = 3.$$

Tästä saadaan $-4 + a = 3$, eli $a = 7$.

Missä tapauksissa raja-arvoa ei ole? Kuten jonojen tapauksessa, sen perusteleminen, että raja-arvoa ei ole, on kätevintä tehdä Cauchyn ehdon avulla:

Lause 3.6.4. *Jos funktiolla $f : B'(x_0, r) \to \mathbb{R}$ on raja-arvo a pisteessä x_0, niin kaikilla $\varepsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ siten, että*

$$x, y \in B'(x_0, \delta) \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Raja-arvon määritelmän mukaan on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|f(x) - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ kaikilla $x \in B'(x_0, \delta)$. Jos nyt $x, y \in B'(x_0, \delta)$, niin kolmioepäyhtälön mukaan

$$|f(x) - f(y)| = |f(x) - a + a - f(y)| \leq |f(x) - a| + |f(y) - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ja väite on todistettu. □

Lause 3.6.4 on käyttökelpoinen kun halutaan osoittaa, että funktiolla ei ole raja-arvoa annetussa pisteessä. Tätä varten tulee ymmärtää, että Lauseen 3.6.4 ehdon looginen negaatio on muotoa

$$\exists \varepsilon > 0 \ : \ \forall \delta > 0 \ \exists x, y \in B'(x_0, \delta) \ : \ |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Huomautus. (a) Lemman 3.6.2 mukaan funktiolla ei ole raja-arvoa pisteessä x_0 jos toispuoleiset raja-arvot ovat pisteessä x_0 erisuuret. Intuitiivisesti tulkiten funktiolla on tällöin "hyppy" pisteessä x_0.

(b) Toinen ilmeinen tapaus, jossa raja-arvoa ei ole, esiintyy, kun funktio (ainakin toispuoleisesti) kasvaa/vähenee rajatta pistettä lähestyttäessä. Olkoon

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Osoitetaan, että funktiolla f ei ole raja-arvoa origossa. Tätä varten, olkoon $\varepsilon = 1$ ja $0 < \delta \leq 1$ mielivaltainen. Valitaan $x = \frac{\delta}{2}$, $y = -\frac{\delta}{2}$. Tällöin $x, y \in B'(0, \delta)$ siten, että

$$|f(x) - f(y)| = \frac{2}{\delta} + \frac{2}{\delta} = \frac{4}{\delta} \geq 4 \geq \varepsilon.$$

Siis Lauseen 3.6.4 ehto ei toteudu, joten raja-arvoa ei ole olemassa origossa.

(c) Kolmas tyypillinen tapaus, jossa myöskään toispuoleisia raja-arvoa ei ole, esiintyy kun funktio oskilloi (=vaihtelee) pisteen x_0 lähellä liian voimakkaasti. Olkoon

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

Osoitetaan, että funktiolla f ei ole raja-arvoa origossa. Tätä varten, olkoon $\varepsilon = 1$ ja $\delta > 0$ mielivaltainen. Tällöin pisteille

$$x_k = \frac{1}{k \cdot 2\pi}, \quad y_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi},$$

pätee $|f(x_k) - f(y_k)| = 1 \geq \varepsilon$ vaikka $x_k, y_k \in B'(0, \delta)$ kunhan $k \in \mathbb{N}$ on riittävän suuri. (Huomaa, että $\lim_{k\to\infty} x_k = 0 = \lim_{k\to\infty} y_k$.) Siis Lauseen 3.6.4 ehto ei toteudu, joten raja-arvoa ei ole olemassa origossa.

3.7. Funktion jatkuvuus

Määritelmä 3.7.1. Olkoon $r > 0$. Funktio $f : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ on *jatkuva pisteessä* x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Edelleen $f : [x_0, x_0 + r[\to \mathbb{R}$ on *oikealta jatkuva pisteessä* x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0),$$

ja $f :]x_0 - r, x_0] \to \mathbb{R}$ on *vasemmalta jatkuva pisteessä* x_0, jos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0).$$

Epsilon-delta-kielellä funktio $f : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä x_0, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$x \in B(x_0, \delta) \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Jos funktio f ei ole jatkuva pisteessä x_0, sanotaan, että f on *epäjatkuva pisteessä* x_0.

Huomautus. Vaikka tavanomaiset alkeisfunktiot ovatkin määrittelyjoukossaan jatkuvia, on helppo antaa esimerkkejä epäjatkuvista funktioista. Jos funktio f on epäjatkuva pisteessä x_0, on kaksi mahdollisuutta:

(1) Funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä x_0.

(2) Funktiolla f on raja-arvo $\lim_{x \to x_0} f(x) =: a$, mutta $a \neq f(x_0)$. Yksinkertainen esimerkki tästä on funktio

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x = 0 \\ 2, & \text{kun } x \neq 0. \end{cases}$$

Tapauksessa (2) voidaan puhua epäolennaisesta epäjatkuvuudesta, koska funktio saadaan jatkuvaksi määrittelemällä se uudestaan pisteessä x_0.

Jatkuvuus säilyy funktioiden tavanomaisissa algebrallisissa operaatioissa. Huomaa, että raja-arvon laskusääntöjen vastaavista väitteistä saadaan välittömästi:

Lause 3.7.2. *Jos f ja g ovat jatkuvia pisteessä x_0, niin funktiot*

$$x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{ja} \quad x \mapsto f(x)g(x)$$

ovat jatkuvia pisteessä x_0. Lisäksi funktio

$$x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

on jatkuva pisteessä x_0 olettaen, että $g(x_0) \neq 0$.

Todistus. Todistetaan malliksi osamäärää koskeva väite. Oletusten mukaan

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \neq 0.$$

Lauseen 3.5.1 kohdan (iv) nojalla

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)},$$

ja väite on todistettu. □

Lemma 3.7.3. *Funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Todistus. Harjoitustehtävä. □

Esimerkki 3.7.4. Epäjatkuvan funktion avulla voidaan konstruoida lisää epäjatkuvia funktioita seuraavasti: Oletetaan, että f on jatkuva pisteessä x_0 ja g on epäjatkuva pisteessä x_0. Tällöin

(a) $f + g$ on epäjatkuva pisteessä x_0;

(b) fg on epäjatkuva pisteessä x_0, jos $f(x_0) \neq 0$;

(c) $\frac{g}{f}$ on epäjatkuva pisteessä x_0, jos $f(x_0) \neq 0$.

Todistetaan malliksi (b). Tätä varten tehdään antiteesi: Funktio h on jatkuva pisteessä x_0, missä $h(x) = f(x)g(x)$. Lauseen 3.7.2 mukaan funktio $g = h/f$ on jatkuva pisteessä x_0, mikä on ristiriidassa oletuksen kanssa.

Lauseesta 3.5.3 seuraa välittömästi:

Lause 3.7.5. *Olkoon f jatkuva pisteessä x_0 ja olkoon g jatkuva pisteessä $f(x_0)$. Tällöin $g \circ f$ on jatkuva pisteessä x_0.*

Suljetulla välillä jatkuva funktio. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Funktiota $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sanotaan *jatkuvaksi suljetulla välillä* $[a, b]$, jos

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

sekä

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

kaikilla $x_0 \in]a, b[$.

Seuraavan tärkeän lauseen todistus perustuu olennaisesti täydellisyysaksiomaan. Lisäksi käytetään Lausetta 3.5.3 ja sitä, että epäyhtälö säilyy raja-arvossa:

Bolzanon lause. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva siten, että $f(a)f(b) < 0$ ($f(a)$ ja $f(b)$ ovat erimerkkiset). Tällöin on olemassa $c \in]a, b[$, jolle $f(c) = 0$.*

Todistus. Voidaan olettaa, että $f(a) < 0$ ja $f(b) > 0$, sillä jos näin ei ole, tarkastellaan funktiota $-f$. Merkitään

$$E = \{\, x \in [a, b] : f(x) < 0 \,\}.$$

Joukko E on epätyhjä ($a \in E$) ja ylhäältä rajoitettu ($x \leq b$ kaikilla $x \in E$). Täydellisyysaksioman nojalla on olemassa $\sup E \in \mathbb{R}$. Merkitään $c := \sup E$ ja osoitetaan, että c on haluttu piste.

Supremumin määritelmän mukaan jokaista $n \in \mathbb{N}$ vastaa $x_n \in E$ siten, että $c - \frac{1}{n} < x_n < c$. Kuristusperiaatteen avulla päätellään, että $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, joten Lauseen 3.5.3(ii) nojalla

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c).$$

Koska epäyhtälö säilyy niin lukujonon kuin funktionkin (toispuoleisessa) raja-arvossa, seuraa ehdosta $f(x_n) \leq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$ raja-arvolle $f(c) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \leq 0$.

Olkoon $y_n = \min\{b, c + \frac{1}{n}\}$. Koska $c < y_n \leq c + \frac{1}{n}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $\lim_{n\to\infty} y_n = c$. Määritelmän nojalla $y_n \in [a, b] \setminus E$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten $f(y_n) \geq 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Epäyhtälön säilyvyydestä raja-arvossa päätellään, että $f(c) \geq 0$.

Yhdistämällä edellä todistetut epäyhtälöt $f(c) \leq 0$ ja $f(c) \geq 0$, saadaan $f(c) = 0$. □

Bolzanon lause II. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva siten, että $f(a) \neq f(b)$. Tällöin f saa jokaisen arvon lukujen $f(a)$ ja $f(b)$ välistä jossakin pisteessä avoimella välillä $]a, b[$.*

Seuraavan tutun lauseen todistus on varsin syvällinen, joten se sivuutetaan tässä kokonaan, ks. esimerkiksi Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskenta I, ss. 98–101.

Lause 3.7.6. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin funktio f saa välillä $[a, b]$ suurimman ja pienimmän arvonsa, eli on olemassa pisteet $x, y \in [a, b]$ siten, että*

$$f(x) = \max f([a, b]) \quad \textit{ja} \quad f(y) = \min f([a, b]).$$

Lausetta 3.7.6 tarvitaan tällä kurssilla lähinnä ääriarvotarkasteluissa.

Huomautus. Huomaa, että erityisesti suljetulla välillä jatkuva funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on *rajoitettu*, so. on olemassa $M > 0$ siten, että $|f(x)| \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$. Luvuksi M voidaan valita esimerkiksi

$$M = \max\{\, |\min f([a, b])|, |\max f([a, b])| \,\}.$$

Jatkuvuus avoimessa joukossa. Avoimet joukot määriteltiin Luvussa 1.8. Positiivisten reaalilukujen joukko $]0, \infty[$ on avoin. Joukko $U = \mathbb{R} \setminus \{\, 1, 2 \,\}$ on avoin, mutta ei avoin väli. Avoimet joukot ovat luonnollisia funktioiden määrittelyjoukkoja silloin, kun tarkastellaan jatkuvuutta ja derivoituvuutta.

Määritelmä 3.7.7. Olkoon $U \subset \mathbb{R}$ avoin. Tällöin funktiota $f : U \to \mathbb{R}$ sanotaan *jatkuvaksi (joukossa U)*, jos f on jatkuva jokaisessa pisteessä $x_0 \in U$.

4. Alkeisfunktiot

Alkeisfunktion käsitteellä ei ole selvää määritelmää, vaan se on yhteisnimitys eräille analyysissä usein esiintyville funktioille. Näihin luetaan rationaalifunktiot ja yleisimmin ns. *algebralliset funktiot* f, jotka toteuttavat algebrallisen yhtälön

$$P(f(x), x) = 0,$$

missä P on kahden muuttujan polynomi. Alkeisfunktioihin luetaan lisäksi monet *transkendenttifunktiot*, siis ei-algebralliset funktiot, kuten esim. trigonometriset funktiot, niiden käänteisfunktiot, sekä eksponentti- ja logaritmifunktiot.

4.1. Potenssifunktio ja juurifunktio

Luvun $x \in \mathbb{R}$ *positiiviset kokonaislukupotenssit* x^n määritellään induktiivisesti asettamalla $x^1 = x$ ja $x^{n+1} = x^n \cdot x$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Luvun $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *nollapotenssi* määritellään asettamalla $x^0 := 1$ ja *negatiiviset kokonaislukupotenssit* yhtälöllä

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

kun $x \neq 0$ ja $n \in \mathbb{N}$. Induktiolla voidaan osoittaa, että

$$x^{m+n} = x^m x^n \quad \text{ja} \quad (x^m)^n = x^{m \cdot n} \tag{4.1}$$

kaikille $m, n \in \mathbb{Z}$ jos $x \neq 0$. Jos $x = 0$, niin kaavat (4.1) pätevät positiivisille potensseille $m, n \in \mathbb{N}$.

Olkoon $n \in \mathbb{N}$ parillinen ja olkoon $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^n,$$

missä $\mathbb{R}_+ = \{\, x \in \mathbb{R} : x \geq 0 \,\}$. Tällöin f on aidosti kasvava (ks. harjoitustehtävä) ja Bolzanon lauseen avulla on helppo päätellä, että $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$. Siis f on bijektio $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$. Käänteiskuvaukselle $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ (n. *juuri*) käytetään merkintää

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \ \left(= x^{\frac{1}{n}}\right).$$

Jos $n \in \mathbb{N}$ on pariton, niin vastaavalla tavalla on todettavissa, että funktio $f(x) = x^n$ on aidosti kasvava bijektio $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Myös tällöin käänteiskuvaukselle käytetään merkintää

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \ \left(= x^{\frac{1}{n}}\right).$$

Huomautus. Siis käänteiskuvauksen (n. juuri) määrittelyjoukko on

- $\mathbb{R}_+$ kun $n \in \mathbb{N}$ on parillinen;
- $\mathbb{R}$ kun $n \in \mathbb{N}$ on pariton.

Lemma 4.1.1. *(a) Kaikilla $n \in \mathbb{N}$ ja $x \in \mathbb{R}_+$ pätee*

$$(\sqrt[n]{x})^n = x \quad \text{ja} \quad \sqrt[n]{x^n} = x.$$

(b) Jos $n \in \mathbb{N}$ on pariton, niin kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$(\sqrt[n]{x})^n = x, \quad \sqrt[n]{x^n} = x \quad \text{ja} \quad \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}.$$

Todistus. Kohdan (a) väitteet ja vastaavat kohdan (b) väitteet pätevät käänteiskuvauksen määritelmän nojalla. Jäljellä on todistaa $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$, missä n on pariton ja $x \in \mathbb{R}$. Koska nyt x^n on injektio, niin

$$\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x} \iff (\sqrt[n]{-x})^n = (-\sqrt[n]{x})^n \iff -x = (-1)^n x.$$

Koska n on pariton, niin $(-1)^n = -1$, eli oikeanpuoleinen väite pätee. □

Olkoon seuraavaksi $x \geq 0$. Edellä määrittelimme juurifunktion

$$x \mapsto \sqrt[n]{x} =: x^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N},$$

potenssifunktion $x \mapsto x^n$ käänteisfunktiona kaikilla $x \geq 0$. Potenssifunktion käsite laajennetaan *positiivisille rationaalipotensseille* yhdistettynä funktiona

$$x^{\frac{m}{n}} := (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}.$$

kaikilla $x > 0$ ja $m, n \in \mathbb{N}$. Lopuksi potenssifunktio määritellään *negatiivisille rationaalipotensseille* kaavalla

$$x^{-\frac{m}{n}} := \frac{1}{x^{\frac{m}{n}}}$$

kaikilla $x > 0$ ja $m, n \in \mathbb{N}$.

Irrationaaliset potenssit määritellään supremumin (tai infimumin) avulla:

Määritelmä 4.1.2. Jos $x \geq 1$ ja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, niin asetetaan

$$x^\alpha = \sup\{\, x^r : r \in \mathbb{Q},\ r < \alpha \,\}.$$

Jos taas $0 < x < 1$ ja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, niin asetetaan

$$x^\alpha = \inf\{\, x^r : r \in \mathbb{Q},\ r < \alpha \,\}.$$

Huomautus. Luonnollisen logaritmin aidon kasvavuuden (perustellaan myöhemmin) nojalla $x^{r_1} < x^{r_2}$ jos ja vain jos $r_1 \ln x < r_2 \ln x$. Näin ollen rationaalilukujen joukossa $\mathbb{Q}$ määritelty funktio $r \to x^r$ on

(i) aidosti kasvava jos $x > 1$ (tällöin $\ln x > 0$);

(ii) aidosti vähenevä jos $0 < x < 1$ (tällöin $\ln x < 0$).

Tämän jälkeen on helppo päätellä, että Määritelmässä 4.1.2 esiintyvä joukko on tapauksessa (i) ylhäältä rajoitettu ja tapauksessa (ii) alhaalta rajoitettu.

Annetuista määritelmistä lähtien voidaan todistaa seuraavat potenssikaavat:

Lause 4.1.3. *Kaikilla $x > 0$, $y > 0$ ja $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ pätee*

(a) $x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$;

(b) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$;

(c) $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$.

4.2. Eksponenttifunktio

Määritelmä 4.2.1. Raja-arvoa

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \approx 2,72$$

kutsutaan *Neperin luvuksi.* (John Napier 1550–1617)

Huomautus. Määritelmän 4.2.1 raja-arvon olemassaolo seuraa siitä, että tarkasteltava jono voidaan osoittaa kasvavaksi ja ylhäältä rajoitetuksi, ks. Lause 2.3.3 ja Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskenta I, ss. 45–47.

Lause 4.2.2. *Eksponenttifunktiolle* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) := e^x$, *pätee*

(a) $e^x > 0$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$;

(b) $e^{x+y} = e^x e^y$ *kaikilla* $x, y \in \mathbb{R}$;

(c) $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$.

Huomautus. Myöhemmin todistetaan, että derivaatan aidosta positiivisuudesta seuraa funktion aito kasvavuus, ja että $D(e^x) = e^x$. Tähän ja Lauseeseen 4.2.2(a) nojaten päätellään, että eksponenttifunktio on aidosti kasvava joukossa $\mathbb{R}$.

Esimerkki 4.2.3. (a) Derivaatan positiivisuuden avulla on kätevintä perustella se, että funktio

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

on aidosti kasvava, kun $x > 0$. Tähän tekniseen laskuun palataan Luvussa 5. Kasvavuuden ja luvun e määritelmän perusteella

$$f(x) \le e = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

kaikilla $x > 0$. Edelleen on olemassa äärellinen raja-arvo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = e.$$

Perustelu: Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n = e$, niin on olemassa $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että kaikilla $n \geq n(\varepsilon)$ pätee $|(1+\frac{1}{n})^n - e| < \varepsilon$. Mutta kaikilla $x \geq n(\varepsilon)$ pätee kasvavuuden perusteella

$$|f(x) - e| = e - f(x) \leq e - \left(1 + \frac{1}{n(\varepsilon)}\right)^{n(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

(b) Raja-arvon säilyminen kuvausten yhdistämisessä takaa sen, että yleisesti ehdosta $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ seuraa, että

$$\lim_{x\to x_0}\left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e.$$

Tässä yhteydessä x_0 voi olla reaaliluku tai $\pm\infty$.

Eksponenttifunktion asymptoottisten ominaisuuksien tarkastelu vaatii seuraavat raja-arvon määritelmän laajennukset, vrt. jonon raja-arvon määritelmä:

Määritelmä 4.2.4. Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Funktiolla $f :]\alpha, +\infty[\to \mathbb{R}$ on *raja-arvo* $a \in \mathbb{R}$ kun $x \to +\infty$, merkitään $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa luku $x(\varepsilon) > 0$ siten, että

$$x \geq x(\varepsilon) \implies |f(x) - a| < \varepsilon.$$

Funktio $f :]\alpha, +\infty[\to \mathbb{R}$ *kasvaa rajatta* kun $x \to +\infty$, merkitään $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, jos jokaista lukua $M > 0$ vastaa luku $x(M) > 0$ siten, että

$$x \geq x(M) \implies f(x) > M.$$

Vastaavasti voitaisiin määritellä äärellinen raja-arvo kun $x \to -\infty$ ja se, milloin funktio kasvaa rajatta kun $x \to -\infty$. Myös voitaisiin analogisesti määritellä milloin funktio vähenee rajatta kun $x \to +\infty$ ja $x \to -\infty$, mutta emme tarvitse näitä käsitteitä vielä tässä vaiheessa.

Huomautus. Eksponenttifunktio kasvaa ”vauhdikkaammin” kuin mikään polynomi. Olkoon $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tällöin

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0, \tag{4.2}$$

eli toisin sanoen

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty. \tag{4.3}$$

Väite (4.2) voidaan kätevästi perustella potenssisarjaesityksen avulla. Nimittäin eksponenttifunktiolla on potenssisarjaesitys

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots,$$

ks. Analyysi III, mistä arvoilla $x > 0$ saadaan välittömästi arvio

$$e^x \geq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Näin ollen

$$0 < \frac{x^n}{e^x} \leq \frac{(n+1)!}{x}$$

kaikilla $x > 0$, mistä raja-arvoväite (4.2) helposti seuraa soveltamalla kuristusperiaatetta. Väite (4.2) voidaan perustella myös soveltamalla L'Hospitalin sääntöä, ks. Luku 5.

4.3. Luonnollinen logaritmi

Edellä jo alustavasti todettiin, että eksponenttifunktio exp on aidosti kasvava joukossa $\mathbb{R}$. Näin ollen exp on injektio joukossa $\mathbb{R}$. Koska

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty,$$

niin Bolzanon lauseen II avulla voidaan päätellä, että $\exp(\mathbb{R}) =]0, \infty[$. Siis exp on bijektio joukosta $\mathbb{R}$ joukkoon $]0, +\infty[$.

Funktion exp käänteisfunktiota kutsutaan *luonnolliseksi logaritmiksi*. Tälle käytetään merkintää $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ (tai $\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$). Logaritmin määritelmän nojalla

$$e^{\ln x} = x, \quad x > 0,$$

ja

$$\ln e^x = x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Luonnollinen logaritmi on aidosti kasvava Lauseen 3.3.2 nojalla.

Lause 4.3.1. *Jos $x, y > 0$, niin*

(i) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$;

(ii) $\ln(\frac{x}{y}) = \ln x - \ln y$;

(iii) $\ln(\frac{1}{x}) = \ln(x^{-1}) = -\ln x$;

(iv) $\ln x^a = a \ln x$ *kaikilla* $a \in \mathbb{R}$.

Todistus. (i) Eksponentin yhteenlaskukaavan nojalla

$$xy = e^{\ln x} \cdot e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}.$$

Ottamalla logaritmit puolittain, saadaan

$$\ln xy = \ln e^{\ln x + \ln y} = \ln x + \ln y.$$

Väite (ii) todetaan vastaavasti ja väite (iii) on väitteen (ii) erikoistapaus. Väitteen (iv) perusteleminen sivuutetaan tässä yhteydessä. $\square$

Huomautus. Eksponenttifunktio ja luonnollinen logaritmi esiintyvät usein sovellutuksissa mm. sen vuoksi, että useiden käytännön ongelmiin liittyvien differentiaaliyhtälöiden ratkaisut ovat ilmaistavissa eksponenttifunktion avulla. Olkoon esimerkiksi $f(t)$ annetun radioaktiivisen aineen hiukkasten määrä ajanhetkellä $t \geq 0$. Kokeellisesti on todennettu, että hiukkasten lukumäärän muutos on kullakin ajanhetkellä verrannollinen hiukkasten lukumäärään:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = -kf, \tag{4.4}$$

missä $k > 0$ on kullekin radioaktiiviselle aineelle ominainen vakio. Olettamalla yksikertaisuuden vuoksi, että funktio f on jatkuva ja derivoituva, voidaan kaavassa (4.4) suorittaa rajankäynti ja päätyä derivaattaan. Toisin sanoen, f noudattaa yhtälöä

$$f'(t) = -kf(t).$$

Määrätään funktion f lauseke. On luonnollista olettaa, että tarkasteltavalla ajanjaksolla $f(t) > 0$, joten saadaan

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = -k \iff (\ln f(t))' = -k.$$

Integroimalla puolittain, saadaan

$$\ln f(t) = -kt + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

ja ottamalla eksponenttifunktiot puolittain, saadaan edelleen

$$f(t) = e^{\ln f(t)} = e^{-kt+C} = e^{-kt}e^{C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sijoittamalla tähän $t = 0$, saadaan $f(0) = e^{-k\cdot 0}e^{C} = e^{C}$, joten ongelmalla on yksikäsitteinen ratkaisu

$$f(t) = f(0)e^{-kt}, \quad t \geq 0.$$

Tähän liittyviä esimerkkejä löytyy runsaasti Calculus-oppikirjoista.

Radioaktiivisen aineen puoliintumisaika T tarkoittaa aikaa, jonka kuluessa radioaktiivisia hiukkasia on jäljellä puolet alkuperäisestä määrästä. Olennaista on, että puoliintumisaika ei riipu arvosta $f(0)$. Nimittäin T on yhtälön $f(T) = \frac{f(0)}{2}$ ratkaisu, eli

$$f(0)e^{-kT} = \frac{f(0)}{2} \iff e^{-kT} = \frac{1}{2}.$$

Ratkaisu löydetään ottamalla luonnollinen logaritmi puolittain. Puoliintumisajaksi saadaan

$$\ln\frac{1}{2} = \ln e^{-kT} \iff -\ln 2 = \ln\frac{1}{2} = -kT \iff T = \frac{\ln 2}{k},$$

eli puoliintumisaika riippuu vain vakiosta $k > 0$.

4.4. Yleiset eksponentti-, logaritmi- ja potenssifunktiot

Olkoon $a > 0$. Lauseen 4.3.1 (iv) mukaan yleinen eksponenttifunktio voidaan ilmaista funktioiden exp ja ln avulla kirjoittamalla

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a} \tag{4.5}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Helposti nähdään, että funktio $x \mapsto a^x$ on aidosti kasvava tapauksessa $a > 1$ ja aidosti vähenevä tapauksessa $a < 1$. Kummassakin tapauksessa a-kantainen eksponenttifunktio voidaan todeta bijektioksi $\mathbb{R} \to]0, +\infty[$.

Funktion $x \mapsto a^x$ käänteisfunktio on *a-kantainen logaritmi* $\log_a x :]0, \infty[\to \mathbb{R}$. Tälle pätee

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Jos nimittäin $y = \log_a x$, niin $x = a^y$. Näin ollen

$$\ln x = \ln a^y = y \ln a \implies y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Ehdon (4.5) nojalla *potenssifunktio*

$$x \mapsto x^a$$

on ilmaistavissa yhtälöllä

$$x^a := e^{a \ln x}, \quad x > 0.$$

Vastaavasti esimerkiksi funktion $x \mapsto x^x$, $x > 0$, tarkastelu palautuu eksponenttifunktioon ja logaritmiin kirjoittamalla

$$x^x = e^{x \ln x}.$$

4.5. Hyperboliset funktiot

Hyperboliset funktiot ovat tiettyjä eksponenttifunktioiden summia ja osamääriä. Trigonometrisiin funktioihin viittaavat nimitykset "hyperbolinen sini" jne. juontavat siitä, että hyperboliset funktiot käyttäytyvät monessa suhteessa kuten trigonometriset funktiot. Hyperboliset funktiot esiintyvät paitsi useissa fysiikan sovellutuksissa myös mm. tarkasteltaessa *hyperbolista etäisyyttä*, jolla puolestaan on tärkeä rooli geometrisessa funktioteoriassa. Mainittakoon, että *hyperbolisen geometrian* keksiminen 1800-luvulla mullisti suuresti matemaattista ajattelua.

Hyperbolinen sini sinh, *hyperbolinen kosini* cosh, *hyperbolinen tangentti* tanh ja *hyperbolinen kotangentti* coth määritellään asettamalla

$$\begin{aligned}
\sinh x &:= \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \\
\cosh x &:= \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), \\
\tanh x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \\
\coth x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{1}{\tanh x}.
\end{aligned}$$

Helposti nähdään, että hyperbolinen sini ja kosini toteuttavat yhtälön

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1,$$

joka muistuttaa sinin ja kosinin sitovaa yhtälöä $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Derivaattakaavat muistuttavat myös trigonometristen funktioiden derivaattakaavoja, sillä

$$D \sinh x = \cosh x, \quad D \cosh x = \sinh x$$

sekä

$$D \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}, \quad D \coth x = -\frac{1}{\sinh^2 x}.$$

Hyperbolisten funktioiden käänteisfunktioita kutsutaan *areafunktioiksi*. Areafunktioille voidaan johtaa kaavat (huomaa määrittelyjoukot)

$$\begin{aligned}
\text{arsinh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x \in \mathbb{R},\\
\text{arcosh} x &= \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \quad x \geq 1,\\
\text{artanh} x &= \tfrac{1}{2} \ln \tfrac{1+x}{1-x}, \quad |x| < 1,\\
\text{arcoth} x &= \tfrac{1}{2} \ln \tfrac{x+1}{x-1}, \quad |x| > 1.
\end{aligned}$$

4.6. Trigonometriset funktiot

Tarkastellaan yksikköympyrän kehän pisteitä, eli tason pisteitä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, joille pätee

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Jokaista lukua (kulmaa) $t > 0$ (*radiaaneina*) vastaa yksikäsitteinen kehäpiste (x, y), $x^2 + y^2 = 1$, kuljettaessa pisteestä $(1, 0)$ *vastapäivään (positiiviseen suuntaan)* pitkin yksikköympyrän kehää t:n pituinen matka. Toisaalta, jokaista lukua (kulmaa) $t < 0$ (radiaania) vastaa yksikäsitteinen kehäpiste (x, y), $x^2 + y^2 = 1$, kuljettaessa pisteestä $(1, 0)$ *myötäpäivään (negatiiviseen suuntaan)* pitkin yksikköympyrän kehää $|t|$:n pituinen matka. Lukua (kulmaa) 0 radiaania vastaa kehäpiste $(1, 0)$.

Funktiot *sini* $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja *kosini* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ määritellään radiaanikulmaa vastaavien kehäpisteen koordinaattien avulla asettamalla

$$\sin t = y \quad \text{ja} \quad \cos t = x,$$

missä (x, y) on kulmaan t yksikäsitteisesti liittyvä yksikköympyrän kehäpiste t:n merkin mukaan suunnistettuna. Siis kierretään positiiviseen suuntaan, jos $t > 0$ ja negatiiviseen suuntaan, jos $t < 0$.

Koska kulmia t ja $t + n \cdot 2\pi$ vastaa aina samat kehäkulmat, niin sinillä ja kosinilla on jaksollisuusominaisuudet

$$\sin t = \sin(t + n \cdot 2\pi) \quad \text{ja} \quad \cos t = \cos(t + n \cdot 2\pi) \tag{4.6}$$

kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja $n \in \mathbb{Z}$.

Määritelmästä lähtien voidaan todistaa seuraavat sinin ja kosinin *avainominaisuudet*, joista muut jatkossa tarvittavat ominaisuudet seuraavat:

Lause 4.6.1. *Sinillä ja kosinilla on ominaisuudet (i)–(iv):*

(i) $\sin 0 = 0$ *ja* $\cos 0 = 1$.

(ii) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ *kaikilla* $x \in \mathbb{R}$.

(iii) Yhteenlaskukaavat

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, \end{aligned}$$

pätevät kaikilla $x, y \in \mathbb{R}$.

(iv) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Lauseessa 4.6.1 esiintyvät x ja y ovat radiaanikulmia, eivät kehäpisteen koordinaatteja. Jaksollisuudesta johtuen sinin ja kosinin kuvaajan kulku tulee olennaisesti hahmotettua, kun hahmotetaan kuvaaja välillä $[0, 2\pi]$.

Seuraus 4.6.2. *Kaikilla* $x \in \mathbb{R}$ *pätee*

(a) $\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$*;*

(b) $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$*;*

(c) $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$*;*

(d) sini on pariton ja kosini on parillinen, eli

$$\sin(-x) = -\sin x \quad \textit{ja} \quad \cos(-x) = \cos x.$$

Todistus. Väite (d) seuraa suoraan sinin ja kosinin määritelmästä. Väite (a) seuraa puolestaan kosinin yhteenlaskukaavasta, sillä

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos(-x) - \sin\frac{\pi}{2}\sin(-x) = -\sin(-x) = \sin x.$$

Kaksinkertaisen kulman kaavat (b) ja (c) saadaan myös helposti yhteenlaskukaavoilla. □

Määritelmä 4.6.3. Funktiot *tangentti* tan ja *kotangentti* cot määritellään asettamalla

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in \mathbb{Z},$$

ja

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \neq \pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Sinin ja kosinin yhteenlaskukaavoista saadaan nimittäjän nollakohtien ulkopuolella

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{\sin x \cos\pi + \cos x \sin\pi}{\cos x \cos\pi - \sin x \sin\pi} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

Näin ollen tangentilla on jaksona π, eli tangentin kuvaaja on muodoltaan samanlainen jokaisella välillä $]-\frac{\pi}{2}+\pi n, \frac{\pi}{2}+\pi n[$, $n \in \mathbb{Z}$. Seuraa, että myös kotangentin jakso on π.

Trigonometristen funktioiden käänteisfunktiot, eli arkusfunktiot. Edellä esitellyt trigonometriset funktiot eivät ole bijektioita joukossa $\mathbb{R}$. Kuitenkin jokaisella funktiolla on määrittelyvälejä, joihin rajoitettuna funktio on bijektio. Esimerkiksi sini on aidosti kasvava välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ja koska $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ sekä $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, seuraa Bolzanon lauseesta II, että sini saa välillä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ kaikki arvot joukosta $[-1,1]$. Koska $|\sin x| \leq 1$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, tästä seuraa, että sini on bijektio väliltä $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ välille $[-1,1]$. Vastaavalla tavalla voidaan perustella, että kosini on bijektio väliltä $[0,\pi]$ välille $[-1,1]$.

Määritelmä 4.6.4. Bijektion $\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ käänteisfunktiota sanotaan *arkussinin päähaaraksi*, tai lyhyesti *arkussiniksi*, ja sille käytetään merkintää $\overline{\text{arc}}\sin$. Vastaavasti bijektion $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ käänteisfunktiota sanotaan *arkuskosinin päähaaraksi*, tai lyhyesti *arkuskosiniksi*, ja sille käytetään merkintää $\overline{\text{arc}}\cos$.

Määritelmä 4.6.5. Bijektion $\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ käänteisfunktiota sanotaan *arkustangentin päähaaraksi*, tai lyhyesti *arkustangentiksi*, ja sille käytetään merkintää $\overline{\text{arc}}\tan$. Vastaavasti bijektion $\cot :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ käänteisfunktiota sanotaan *arkuskotangentin päähaaraksi*, tai lyhyesti *arkuskotangentiksi*, ja sille käytetään merkintää $\overline{\text{arc}}\cot$.

Trigonometrisille funktioille löytyy luonnollisesti muitakin määrittelyvälejä, joilla funktiot ovat bijektioita. Rajoitumme kuitenkin tarkastelemaan ainoastaan päähaaroja, koska muiden haarojen tarkastelu ei tuo olennaista lisäarvoa teoriaan.

5. Differentiaalilaskentaa

5.1. Derivaatan määritelmä ja yleiset derivoimissäännöt

Esimerkissä 3.4.1 tarkasteltiin painovoimalain mukaista vapaata pudotusta ja päädyttiin erotusosamäärän raja-arvoon. Näin ajaudutaan derivaatan käsitteeseen:

Määritelmä 5.1.1. Olkoon $f : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ funktio. Jos *erotusosamäärällä*

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}, \quad h \neq 0,\ |h| < r,$$

on (äärellinen) raja-arvo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

tätä raja-arvoa sanotaan *funktion f derivaataksi pisteessä x_0*. Merkitään

$$Df(x_0) := f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Sanotaan myös, että f *on derivoituva pisteessä* x_0. Suoraa

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

sanotaan pisteeseen $(x_0, f(x_0))$ liittyväksi kuvakäyrän $y = f(x)$ *tangentiksi.*

Olkoon $U \subset \mathbb{R}$ avoin. Jos f on derivoituva joukon U jokaisessa pisteessä, sanotaan, että f *on derivoituva (joukossa U)*. Tällöin jokaista $x \in U$ vastaa luku $f'(x)$. Näin määriteltyä kuvausta $f' : U \to \mathbb{R}$ kutsutaan funktion f *derivaataksi (derivaattakuvaukseksi).*

Huomautus. (a) Erotusosamäärä kirjoitetaan usein muodossa

$$\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

jolloin siis $h := x - x_0$ ($x = x_0 + h$) ja

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Huomaa, että $h \to 0$ jos ja vain jos $x \to x_0$.

(b) Erotusosamäärän toispuoleisille raja-arvoille (eli toispuoleisille derivaatoille) käytetään merkintöjä

$$f'_+(x_0) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

ja

$$f'_-(x_0) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

jos ko. raja-arvot ovat olemassa.

Esimerkki 5.1.2. Tarkastellaan funktion $f(x) = |x|$ derivaattaa pisteessä 0. Määrätään erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot. Kun $h > 0$, saadaan

$$f'_+(0) := \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1.$$

Kun taas $h < 0$, saadaan

$$f'_-(0) := \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1.$$

Erotusosamäärän toispuoleiset raja-arvot (=toispuoleiset derivaatat $f'_+(0)$ ja $f'_-(0)$) ovat erisuuret, joten varsinaista raja-arvoa ei ole. Siis f ei ole derivoituva origossa.

Intuitiivinen tulkinta: Derivaattaa ei ole, jos funktion kuvaaja muodostaa "teräviä" kulmia. Tällöin toispuoleiset derivaatat ovat erisuuret.

Jatkuvuus ei siis takaa derivoituvuutta. Käänteinen väite kuitenkin pätee:

Lause 5.1.3. *Olkoon f derivoituva pisteessä x_0. Tällöin f on jatkuva pisteessä x_0.*

Esimerkki 5.1.4. Sivulla 40 todettiin, että eksponenttifunktiolla on sarjakehitelmä

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots$$

Näin ollen

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots\right) = \lim_{h\to 0}\left(1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \cdots\right) = 1.$$

Olkoon $f(x) = e^x$. Tällöin

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x,$$

eli eksponenttifunktio ei muutu derivoitaessa. Toisin sanoen, $De^x = e^x$.

Ensimmäisenä derivaatan sovellutuksena tarkastellaan $\frac{0}{0}$-tyyppisiin raja-arvotilanteisiin liittyvää L'Hospitalin lausetta:

L'Hospitalin lause I. *Olkoot $f, g : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ funktioita siten, että*

(i) $f(x_0) = g(x_0) = 0$;

(ii) derivaatat $f'(x_0)$ *ja* $g'(x_0)$ *ovat olemassa;*

(iii) $g'(x_0) \neq 0$.

Tällöin

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Huomautus. L'Hospitalin lauseen oletukset on ehdottomasti tarkistettava ennen lauseen soveltamista. Esimerkiksi "lasku"

$$\lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{2}{2x} = \frac{2}{2\cdot 1} = 1$$

on pahasti pielessä. Miksi?

Derivoimissääntöjä. Derivoimisen lähtökohtana ovat seuraavan lauseen antamat perussäännöt:

Lause 5.1.5. *Olkoot f ja g derivoituvia pisteessä x. Tällöin*

(a) $D(f(x)+g(x)) = Df(x) + Dg(x)$;

(b) $D(cf(x)) = cDf(x)$ *kaikilla* $c \in \mathbb{R}$;

(c) $D(f(x)g(x)) = g(x)Df(x) + f(x)Dg(x)$;

(d) $D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g(x)^2}$ *mikäli* $g(x) \neq 0$.

Todistus. Väitteet (a), (b) ja (c) todetaan luennolla/harjoituksissa.
Todistetaan väite (d). Tätä varten osoitetaan ensin, että

$$D\left(\frac{1}{g(x)}\right) = -\frac{Dg(x)}{g(x)^2}. \tag{5.1}$$

Jos $h \neq 0$, niin

$$\frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = \frac{g(x)-g(x+h)}{h} \cdot \frac{1}{g(x)g(x+h)}.$$

Koska $\lim_{h\to 0} \frac{g(x)-g(x+h)}{h} = -Dg(x)$ ja jatkuvuuden nojalla $\lim_{h\to 0} \frac{1}{g(x+h)} = \frac{1}{g(x)}$, niin

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} = -\frac{Dg(x)}{g(x)^2}.$$

Nyt yhtälön (5.1) ja kohdan (c) seurauksena

$$\begin{aligned} D\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) &= D\left(f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right) = Df(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot -\frac{Dg(x)}{g(x)^2} \\ &= \frac{g(x)Df(x) - f(x)Dg(x)}{g(x)^2}, \end{aligned}$$

ja väite (d) on todistettu. □

Ketjusääntö. *Olkoon g derivoituva pisteessä x ja f derivoituva pisteessä $g(x)$. Tällöin yhdistetty funktio $f\circ g$ on derivoituva pisteessä x ja*

$$D(f\circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x).$$

Todistus. Tarkastellaan tässä yksinkertaisuuden vuoksi vain tapausta, jossa g on aidosti monotoninen eräässä x:n ympäristössä $B(x,r)$. Jos nyt $h \neq 0$ ja $x+h \in B(x,r)$, voidaan kirjoittaa

$$\frac{(f\circ g)(x+h) - (f\circ g)(x)}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h)-g(x)} \cdot \frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Tässä
$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=g'(x).$$
Toisaalta g on jatkuva pisteessä x, joten $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)=g(x)$, ja näin ollen
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{g(x+h)-g(x)}=f'(g(x)).$$
Väite saadaan yhdistämällä raja-arvoväitteet. Yleinen todistus löytyy mm. kirjasta Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskenta I, s. 114. □

Esimerkki 5.1.6. Yhdistettäessä kolme derivoituvaa funktiota, saadaan
$$(h\circ g\circ f)'(x)=h'((g\circ f)(x))(g\circ f)'(x)=h'((g\circ f)(x))g'(f(x))f'(x).$$

Olkoon $f\ :]a,b[\to]c,d[$ derivoituva bijektio ja oletetaan, että $f^{-1}\ :]c,d[\to]a,b[$ on myös derivoituva. Tällöin kirjoittamalla
$$(f^{-1}\circ f)(x)=x,$$
missä $x\in]a,b[$, saadaan derivoimalla puolittain kejusäännön nojalla
$$(f^{-1})'(f(x))f'(x)=1.$$
Siis
$$(f^{-1})'(f(x))=\frac{1}{f'(x)}.$$
Näin saadun käänteisfunktion derivoimiskaavan ongelmana on se, ettei käänteisfunktion f^{-1} derivoituvuudesta ole aina takeita. Tätä ongelmaa koskien voidaan kuitenkin todistaa seuraava lause, ks. Myrberg: Differentiaali- ja integraalilaskenta I, ss. 116–117:

Käänteisfunktion derivoimiskaava. *Oletetaan, että funktio f on derivoituva pisteen x_0 ympäristössä $B(x_0,r)$ ja joko $f'(x)>0$ kaikilla $x\in B(x_0,r)$ tai $f'(x)<0$ kaikilla $x\in B(x_0,r)$. Tällöin funktion f käänteisfunktio f^{-1} on määritelty eräässä pisteen $y_0=f(x_0)$ ympäristössä, käänteisfunktio f^{-1} on derivoituva pisteessä $f(x_0)$, ja*
$$Df^{-1}(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \tag{5.2}$$

Huomautus. Lause 3.3.2 seuraa myös kaavasta (5.2).

Esimerkki 5.1.7. Sovelletaan käänteisfunktion derivoimiskaavaa juurifunktion derivoimiskaavan määräämiseen. Olkoon $n\in\mathbb{N}$ ja $f(x)=x^n$, jolloin siis $f^{-1}(x)=x^{\frac{1}{n}}$ arvoilla $x\geq 0$. Koska $f'(x)=nx^{n-1}>0$ arvoilla $x>0$, saadaan käänteisfunktion derivoimiskaavan nojalla kaikilla $y>0$
$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\frac{1}{n(y^{\frac{1}{n}})^{n-1}}=\frac{1}{ny^{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Huom! Yhtä hyvin voisi käyttää muuttujaa x muuttujan y sijasta.

5.2. Rollen lause ja väliarvolause

Rollen lause ja väliarvolause antavat keskeisen keinon tarkastella funktion ominaisuuksia derivaatan avulla. Rollen lauseen todistamiseksi tarvitsemme kaksi aputulosta.

Lemma 5.2.1. *Olkoon f derivoituva pisteessä x_0.*

(i) Jos $f'(x_0) > 0$, niin on olemassa $r > 0$ siten, että $f(x) < f(x_0)$ kun $x_0 - r < x < x_0$ ja $f(x) > f(x_0)$ kun $x_0 < x < x_0 + r$.

(ii) Jos $f'(x_0) < 0$, niin on olemassa $r > 0$ siten, että $f(x) > f(x_0)$ kun $x_0 - r < x < x_0$ ja $f(x) < f(x_0)$ kun $x_0 < x < x_0 + r$.

Lemma 5.2.2. *Olkoon $x_0 \in]a, b[$ ja oletetaan, että kuvaus $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ saa suurimman tai pienimmän arvonsa pisteessä x_0, eli*

$$f(x_0) = \max f(]a, b[) \quad \textit{tai} \quad f(x_0) = \min f(]a, b[).$$

Tällöin $f'(x_0) = 0$, jos f on derivoituva pisteessä x_0.

Todistus. Tehdään vastaoletus, että $f'(x_0) \neq 0$. Tällöin joko $f'(x_0) > 0$ tai $f'(x_0) < 0$. Kummassakin tapauksessa saadaan Lemman 5.2.1 nojalla, että piste x_0 ei ole funktion f pienin eikä suurin arvo, mikä on ristiriita. □

Rollen lause. *Oletetaan, että*

(i) f on jatkuva välillä $[a, b]$,

(ii) f on derivoituva välillä $]a, b[$,

(iii) $f(a) = f(b) = 0$.

Tällöin on olemassa ainakin yksi piste $c \in]a, b[$ siten, että $f'(c) = 0$.

Todistus. Lauseen 3.7.6 mukaan funktio f saa pienimmän arvonsa ja suurimman arvonsa välillä $[a, b]$. Olkoot $x_1, x_2 \in [a, b]$ siten, että

$$f(x_1) = \max f([a, b]) \quad \text{ja} \quad f(x_2) = \min f([a, b]).$$

Voidaan olettaa, että $f(x) \neq 0$ jollakin $x \in]a, b[$. Siis $f(x_1) \neq 0$ tai $f(x_2) \neq 0$, eli $x_1 \in]a, b[$ tai $x_2 \in]a, b[$. Lemman 5.2.2 mukaan joko $f'(x_1) = 0$ tai $f'(x_2) = 0$. □

Väliarvolause. *Oletetaan, että*

(i) f on jatkuva välillä $[a, b]$,

(ii) f on derivoituva välillä $]a, b[$.

Tällöin on olemassa ainakin yksi piste $c \in]a, b[$ siten, että

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Väliarvolausetta käyttäen voidaan todistaa seuraava vahvempi versio L'Hospitalin lauseesta, jonka todistus löytyy esimerkiksi Calculus–kirjoista:

L'Hospitalin lause II. *Olkoot $f, g : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ funktioita siten, että*

(i) $f(x_0) = g(x_0) = 0$*;*

(ii) derivaatat $f'(x)$ *ja* $g'(x)$ *ovat olemassa ympäristössä* $B(x_0, r)$*;*

(iii) $g'(x) \neq 0$ *kaikilla* $x \in B'(x_0, r)$*.*

Tällöin

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Version II etuna on se, että sitä voidaan soveltaa monta kertaa peräkkäin:

Esimerkki 5.2.3. Määrätään

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4}{x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 4x} =: \lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Koska $f(2) = g(2) = 0$, voitaisiin osoittaja ja nimittäjä jakaa lausekkeella $x - 2$ niin monta kertaa kuin mahdollista. L'Hospitalin lause II antaa kuitenkin toisen (usein helpomman) ratkaisun. Koska myös derivoituvuusoletukset (ii) ja (iii) ovat voimassa, saadaan L'Hospitalin lauseen II nojalla

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{4x^3 - 12x^2 + 10x - 4}{4x^3 - 15x^2 + 16x - 4}.$$

Edelleen $f'(2) = g'(2) = 0$, joten soveltamalla L'Hospitalin lausetta uudestaan, saadaan

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to 2} \frac{4x^3 - 12x^2 + 10x - 4}{4x^3 - 15x^2 + 16x - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{12x^2 - 24x + 10}{12x^2 - 30x + 16} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}.$$

Lause 5.2.4. *Olkoon $f : [x_0, x_0 + r] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio, joka on derivoituva välillä $]x_0, x_0 + r[$ siten, että derivaatalle pätee*

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = a \in \mathbb{R}.$$

Tällöin

$$f'_+(x_0) = a.$$

Vastaava tulos pätee myös vasemmanpuoleiselle derivaatalle $f'_-(x_0)$ sekä varsinaiselle derivaatalle $f'(x_0)$.

Todistus. Olkoon $h > 0$ siten, että $x_0 + h \in]x_0, x_0 + r[$. Tällöin väliarvolauseen nojalla on olemassa $c \in]x_0, x_0 + h[$ siten, että

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(c).$$

Kun $h \to 0^+$, niin kuristusperiaatteen nojalla $c \to x_0^+$, joten oletuksen nojalla

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{c \to x_0^+} f'(c) = a.$$

Tässä tarkka perustelu saadaan raja-arvon määritelmää käyttämällä. Siis $f'_+(x_0) = a$. $\square$

5.3. Transkendenttifunktioiden derivoiminen

Lause 5.3.1. ***(Eksponenttifunktio ja luonnollinen logaritmi)***

(i) *Kaikilla* $x \in \mathbb{R}$ *pätee* $De^x = e^x$.

(ii) *Kaikilla* $x \neq 0$ *pätee* $D \ln |x| = \frac{1}{x}$.

Huomautus. Olkoon $a > 0$. Tällöin a-kantaisen eksponenttifunktion ja logaritmifunktion derivoimiskaavat saadaan yhtälöistä

$$a^x = e^{x \ln a} \quad \text{ja} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Siis kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$Da^x = a^x \ln a$$

ja kaikilla $x \neq 0$ pätee

$$D \log_a |x| = \frac{1}{x \ln a}.$$

Lause 5.3.2. ***(Trigonometriset funktiot)***

(i) *Kaikilla* $x \in \mathbb{R}$ *pätee* $D \sin x = \cos x$.

(ii) *Kaikilla* $x \in \mathbb{R}$ *pätee* $D \cos x = -\sin x$.

(iii) *Nimittäjän nollakohtien ulkopuolella pätee*

$$D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

(iv) *Nimittäjän nollakohtien ulkopuolella pätee*

$$D \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x).$$

Esimerkki 5.3.3. Monet trigonometriset raja-arvot ratkeavat helposti L'Hospitalin lauseen (tai Taylorin kaavan) avulla, mutta ovat työläitä selvittää ilman derivaattaa. Esimerkiksi L'Hospitalin lauseen II nojalla saadaan (muista tarkastaa oletukset joka vaiheessa)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}.$$

Yhdistämällä käänteisfunktion derivoimiskaava ja trigonometristen funktioiden derivoimiskaavat, saadaan seuraavat arkusfunktioiden derivoimiskaavat:

Lause 5.3.4. ***(Arkusfunktiot)***

(i) $D\overline{\text{arc}}\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *kaikilla* $-1<x<1$.

(ii) $D\overline{\text{arc}}\cos x=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ *kaikilla* $-1<x<1$.

(iii) $D\overline{\text{arc}}\tan x=\dfrac{1}{1+x^2}$ *kaikilla* $x\in\mathbb{R}$.

(iv) $D\overline{\text{arc}}\cot x=-\dfrac{1}{1+x^2}$ *kaikilla* $x\in\mathbb{R}$.

5.4. Ääriarvot

Väliarvolauseen avulla päädytään derivoituvien funktioiden ääriarvo-ongelman ratkaisuun. Tarkastellaan ensin sitä, mitä derivaatan merkki kertoo funktion monotonisuudesta.

Lemma 5.4.1. *Olkoon* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *jatkuva.*

(i) Jos $f'(x)>0$ *kaikilla* $x\in]a,b[$, *niin* f *on aidosti kasvava välillä* $[a,b]$.

(ii) Jos $f'(x)<0$ *kaikilla* $x\in]a,b[$, *niin* f *on aidosti vähenevä välillä* $[a,b]$.

Todistus. Todistetaan väite (i). Jos $x,y\in[a,b]$ ja $x<y$, niin väliarvolauseen ja oletuksen mukaan on olemassa $c\in]a,b[$ siten, että

$$f(y)-f(x)=f'(c)(y-x)>0.$$

Siis $f(x)<f(y)$, eli f on aidosti kasvava välillä $[a,b]$. Väite (ii) vastaavasti. □

Huomautus. Lauseen 5.4.1 väitteet yleistyvät helposti myös muun tyyppisille väleille. Derivaattaa koskevat oletukset tarvitaan vain vastaavalla avoimella välillä, jos jatkuvuusoletus pätee myös välin mahdollisissa päätepisteissä. Nämä yleistykset pidetään jatkossa tunnettuina.

Määritelmä 5.4.2. Funktiolla f on pisteessä x_0 *lokaali maksimikohta* (vastaavasti *lokaali minimikohta*), jos $f(x_0)$ on funktion f suurin (vastaavasti pienin) arvo jossakin pisteen x_0 ympäristössä $B(x, r)$. Arvoa $f(x_0)$ sanotaan tällöin *lokaaliksi maksimiarvoksi* (vastaavasti *lokaaliksi minimiarvoksi*).

Nimityksiä. *(Lokaali) ääriarvokohta* on joko lokaali maksimikohta tai lokaali minimikohta. *(Lokaali) ääriarvo* on joko lokaali maksimi tai lokaali minimi.

Puhutaan myös *oleellisesta maksimista* (vastaavasti *oleellisesta minimistä*), jos $f(x_0) > f(x)$ (vastaavasti $f(x_0) < f(x)$) kaikilla $x \in B'(x_0, r)$.

Lause 5.4.3. *Olkoon $f : B(x_0, r) \to \mathbb{R}$ jatkuva ja oletetaan, että f on derivoituva punkteeratussa ympäristössä $B'(x_0, r)$.*

(i) Jos $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]x_0 - r, x_0[$ ja $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in]x_0, x_0 + r[$, niin funktiolla f on pisteessä x_0 lokaali maksimi.

(ii) Jos $f'(x) < 0$ kaikilla $x \in]x_0 - r, x_0[$ ja $f'(x) > 0$ kaikilla $x \in]x_0, x_0 + r[$, niin funktiolla f on pisteessä x_0 lokaali minimi.

Todistus. Todistetaan väite (i). Jos $x \in]x_0 - r, x_0[$, niin väliarvolausetta voidaan soveltaa välillä $[x, x_0]$. Saadaan

$$f(x_0) - f(x) = f'(c)(x_0 - x),$$

missä $c \in]x, x_0[$. Nyt oletuksen mukaan $f'(c) > 0$ ja $x_0 - x > 0$, joten $f(x_0) - f(x) > 0$, eli $f(x_0) > f(x)$. Vastaavasti, jos $x \in]x_0, x_0 + r[$, niin

$$f(x) - f(x_0) = f'(c^*)(x - x_0),$$

missä $c^* \in]x_0, x[$. Koska oletuksen mukaan $f'(c^*) < 0$, saadaan $f(x) - f(x_0) < 0$, eli $f(x) < f(x_0)$. Väite (i) seuraa. Väite (ii) todistetaan vastaavasti. □

Huomautus. Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva. Tällöin Lauseen 3.7.6 ja Lemman 5.2.2 nojalla funktio f saa suurimman ja pienimmän arvonsa jossakin seuraavista pisteistä:

- välin $[a, b]$ päätepisteissä;
- derivaatan f' nollakohdissa;
- mahdollisissa derivoitumattomuuspisteissä.

Tietyt epäyhtälöt voidaan kätevästi todistaa ääriarvo-ongelman ratkaisuna:

Esimerkki 5.4.4. Osoitetaan, että kaikilla $x \in \mathbb{R}$ pätee

$$e^x \geq x + 1. \tag{5.3}$$

Merkitään $f(x) = e^x - x - 1$. Riittää osoittaa, että funktion f pienin arvo joukossa $\mathbb{R}$ on ei-negatiivinen. Derivoimalla saadaan

$$f'(x) = e^x - 1,$$

joten $f'(0) = 0$, $f'(x) < 0$ kun $x < 0$ ja $f'(x) > 0$ kun $x > 0$. Näin ollen funktio f on vähenevä välillä $]-\infty, 0[$, kasvava välillä $]0, +\infty[$, ja pisteessä $x = 0$ funktiolla f on lokaali minimi, joka samalla on pienin arvo joukossa $\mathbb{R}$. Mutta $f(0) = e^0 - 1 = 0$, joten $f(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, eli väite (5.3) seuraa.

Globaalien ääriarvo-ongelmien yhteydessä tarvitaan yleensä lisätarkasteluja sen selvittämiseen, antavatko lokaalit ääriarvot myös globaaleja ääriarvoja:

Esimerkki 5.4.5. Määrätään käyrän $y = x^2$ etäisyys pisteestä $(2, \frac{1}{2})$. Ko. etäisyys saadaan minimoimalla funktion

$$f(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (x^2 - \frac{1}{2})^2}$$

arvo kun $x \in \mathbb{R}$. Koska neliöjuuri on aidosti kasvava, f saa pienimmän arvonsa täsmälleen silloin kun funktio

$$g(x) = (x-2)^2 + (x^2 - \frac{1}{2})^2 = x^2 - 4x + 4 + x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = x^4 - 4x + \frac{17}{4}$$

saa pienimmän arvonsa joukossa $\mathbb{R}$. Nyt

$$g'(x) = 4x^3 - 4 = 0 \iff x^3 = 1 \iff x = 1.$$

Koska $g'(x) < 0$ kun $x \in]-\infty, 1[$ ja $g'(x) > 0$ kun $x \in]1, \infty[$, niin Lauseen 5.4.3 mukaan funktiolla g on pisteessä $x = 1$ lokaali minimi. Kyseessä on myös pienin arvo joukossa $\mathbb{R}$, sillä g on välillä $]-\infty, 1]$ aidosti vähenevä ja välillä $[1, +\infty[$ aidosti kasvava. Kysytty etäisyys on siis

$$f(1) = \sqrt{g(1)} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

ja tätä vastaava käyrän $y = x^2$ piste on $(1, 1)$.

Vastaava tehtävä johtaa yleisessä tilanteessa helposti laskuteknisiin ongelmiin koska ratkaisu edellyttää kolmannen asteen polynomin nollakohtien määräämistä.

5.5. Äärettömät raja-arvot

Raja-arvo $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ on määritelty aiemmin, ks. Määritelmä 4.2.4. Vastaavasti asetetaan:

Määritelmä 5.5.1. Olkoon $a \in \mathbb{R}$. Funktiolla $f :]-\infty, a[\to \mathbb{R}$ on *raja-arvo* $-\infty$ kun $x \to -\infty$, jos jokaista lukua $m < 0$ vastaa $x(m) < a$ siten, että

$$x < x(m) \implies f(x) < m.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Vastaavasti määritellään raja-arvot

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ja} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty.$$

Raja-arvon $+\infty$ tapauksessa sanotaan, että *funktio kasvaa rajatta*, ja raja-arvon $-\infty$ tapauksessa sanotaan, että *funktio vähenee rajatta*.

Huomautus. (a) Äärettömien raja-arvojen yhteydessä tavanomaiset yhteen- ja kertolaskua koskevat raja-arvosäännöt pätevät *vain tietyin rajoituksin*. Epämääräisiä muotoja ovat ainakin

$$-\infty + \infty, \quad 0 \cdot \pm\infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty},$$

joten äärettömien raja-arvojen tapauksessa laskusääntöjen käytössä on oltava varovainen.

(b) Jonojen yhteydessä esitettyjen kuristusperiaatteiden vastineet pätevät luonnollisesti myös funktioille.

Esimerkki 5.5.2. Osoitetaan määritelmän avulla, että $\lim_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty$. Jos $m < 0$ ja $x < 0$, niin

$$-x^2 < m \iff x^2 > -m \iff x < -\sqrt{-m} =: x(m).$$

Siis, jos $x < -\sqrt{-m} = x(m)$, niin $f(x) = -x^2 < m$.

Käytännössä alkeisfunktioiden äärettömiä raja-arvoja koskevat väitteet voidaan usein päätellä derivaatan käyttäytymisestä väliarvolauseen avulla:

Esimerkki 5.5.3. Oletetaan, että $c > 0$ ja että funktio f toteuttaa ehdon $f'(x) \geq c > 0$ kaikilla $x \in [a, +\infty[$, missä $a \in \mathbb{R}$. Tällöin väliarvolauseesta seuraa, että

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Vastaavasti, jos ehto $f'(x) \geq c > 0$ pätee kaikilla $x \in]-\infty, a]$, missä $a \in \mathbb{R}$, niin

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Jos ylläoleva ehto $f'(x) \geq c$ korvataan ehdolla $f'(x) \leq c < 0$, missä $c < 0$, niin merkit vaihtuvat raja-arvoissa.

Luonnollisesti voidaan myös määritellä äärettömät raja-arvot äärellisessä pisteessä:

Määritelmä 5.5.4. Funktiolla $f : B'(x_0, r) \to \mathbb{R}$ on *raja-arvo* $-\infty$ *pisteessä* x_0, jos jokaista $m < 0$ vastaa luku $\delta > 0$ siten, että

$$x \in B'(x_0, \delta) \implies f(x) < m.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Vastaavasti määritellään raja-arvo $+\infty$ pisteessä x_0.

5.6. Korkeammat derivaatat

Jos funktio f on derivoituva avoimen välin $\Delta \subset \mathbb{R}$ jokaisessa pisteessä, niin derivaatta määrittelee funktion $f' : \Delta \to \mathbb{R}$. Jos f' on lisäksi jatkuva välillä Δ, niin merkitään $f \in \mathbb{C}^1(\Delta)$. Sanotaan myös, että f on jatkuvasti derivoituva.

Jos edelleen funktio f' on derivoituva välin Δ jokaisessa pisteessä, niin kyseistä derivaattaa $Df'(x)$ sanotaan funktion f *toiseksi derivaataksi*, merkitään $f''(x)$ tai $f^{(2)}(x)$ tai $D^2 f(x)$. Jos f' ja f'' ovat lisäksi jatkuvia välillä Δ, niin merkitään $f \in \mathbb{C}^2(\Delta)$.

Vastaavaan tapaan määritellään yleisesti *n:nnen kertaluvun derivaatta* $f^{(n)}(x)$ asettamalla

$$f^{(n)}(x) = Df^{(n-1)}(x), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

Jos funktiot $f', \ldots, f^{(n)}$ ovat lisäksi jatkuvia välillä Δ, niin merkitään $f \in \mathbb{C}^n(\Delta)$.

Esimerkki 5.6.1. Jos $f(x) = x^4 - 2x$, niin

$$f''(x) = D(f'(x)) = D(4x^3 - 2) = 12x^2$$

ja

$$f^{(3)}(x) = 24x.$$

Korkeammat derivaatat tulevat jatkossa vastaan mm. Taylorin kaavan yhteydessä. Esimerkkinä toisen derivaatan merkityksestä tarkastellaan lyhyesti konveksisuuden käsitettä. Konveksisuus on tärkeässä roolissa monilla matematiikan osa-alueilla, mm. optimoinnissa ja peliteoriassa. Käsitettä sivutaan myös useamman muuttujan ääriarvojen yhteydessä.

Määritelmä 5.6.2. Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ väli. Funktio $f : \Delta \to \mathbb{R}$ on *konveksi*, jos

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

kaikilla $x, y \in \Delta$ ja $0 < \lambda < 1$. Funktio f on *konkaavi*, jos $-f$ on konveksi.

Funktio $f : \Delta \to \mathbb{R}$ on *aidosti konveksi*, jos Määritelmässä 4.6.1 esiintyy *aito epäyhtälö* kaikilla $x, y \in \Delta$ ja $0 < \lambda < 1$. Vastaavasti määritellään aito konkaavisuus välillä Δ.

Huomautus. Geometrisesti konveksisuusehto tarkoittaa sitä, että kahden kuvaajan $y = f(x)$ pisteen $P = (x, f(x))$ ja $Q = (y, f(y))$ välinen jana PQ aina sijaitsee kuvaajan $y = f(x)$ yläpuolella. Nimittäin pisteiden $R = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$ ja P kautta kulkevan suoran kulmakertoimeksi saadaan

$$\frac{\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(x)}{\lambda x + (1-\lambda) y - x} = \frac{(\lambda - 1)(f(x) - f(y)}{(\lambda - 1)(x - y)} = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Siis R sijaitsee pisteiden P ja Q kautta kulkevalla suoralla. On ilmeistä, että R itseasiassa on janalla PQ. Konkaavisuus tarkoittaa sitä, että kahden kuvaajan $y = f(x)$ pisteen $P = (x, f(x)$ ja $Q = (y, f(y))$ välinen jana PQ aina sijaitsee kuvaajan $y = f(x)$ alapuolella.

Konveksisuuden yhteys toiseen derivaattaan käy ilmi seuraavasta tuloksesta, jonka todistus sivuutetaan tällä kurssilla:

Lause 5.6.3. *Olkoon f avoimella välillä Δ derivoituva. Tällöin seuraavat väitteet (i)–(iii) ovat ekvivalentteja:*

(i) f *on konveksi välillä* Δ*;*

(ii) f' *on kasvava välillä* Δ*;*

(iii) f *on* alaspäin kupera, *eli kuvaajan* $y = f(x)$ *jokainen tangentti on kuvaajan alapuolella.*

Vastaavasti väitteet (i')–(iii') ovat ekvivalentteja:

(i') f *on konkaavi välillä* Δ*;*

(ii') f' *on vähenevä välillä* Δ*;*

(iii') f *on* ylöspäin kupera, *eli kuvaajan* $y = f(x)$ *jokainen tangentti on kuvaajan yläpuolella.*

Huomautus. (a) Lause 5.6.3 pätee muodossa: Olkoon f avoimella välillä Δ derivoituva. Tällöin seuraavat väitteet (i)–(iii) ovat ekvivalentteja:

(i) f on aidosti konveksi välillä Δ,

(ii) f' on aidosti kasvava välillä Δ,

(iii) f on *aidosti alaspäin kupera*, eli kuvaajan $y = f(x)$ jokainen tangentti on kuvaajan alapuolella yhtä pistettä lukuun ottamatta.

Vastaavat väitteet pätevät aidosti konkaavissa tapauksessa.

(b) Lauseen 5.6.3 ehdot (i)–(iii) pätevät erityisesti, jos $f''(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \Delta$. Ehdot (i')–(iii') pätevät erityisesti, jos $f''(x) \leq 0$ kaikilla $x \in \Delta$. Kohdan (a) tilanteessa epäyhtälöiden tulee olla aitoja.

Määritelmä 5.6.4. Piste x_0 on funktion f *käännepiste*, jos $f''(x_0) = 0$ ja $f''(x)$ on erimerkkinen pisteen x_0 eri puolilla jossakin ympäristössä $B(x_0, r)$.

5.7. Implisiittinen derivointi

Tähän mennessä olemme tarkastelleet funktioita, joiden lauseke on esitetty niin sanotussa *ratkaistussa*, eli *eksplisiittisessä* muodossa

$$y = f(x).$$

Joskus suureiden x ja y riippuvuuden tarkastelu johtaa yhtälöön

$$f(x, y) = 0,$$

esimerkiksi

$$xy^5 + 4x^3 \sin xy + 3 = 0.$$

Tätä sanotaan funktion ratkaisemattomaksi, eli *implisiittiseksi* esitysmuodoksi.

Joskus implisiittisestä esitysmuodosta voidaan toinen muuttuja ratkaista toisen avulla, mutta tämä ei ole aina mahdollista. Lisäksi implisiittinen esitysmuoto ei välttämättä määrää funktiota yksikäsitteisesti. Esimerkiksi tutusta ympyrän yhtälöstä $x^2 + y^2 = r^2$ ratkaistaessa x, saadaan

$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2}$$

(kaksi funktiota, rajoituksilla yksikäsitteisyys).

Derivoitaessa implisiittistä esitysmuotoa, oletetaan, että y on muuttujan x funktio (tai päinvastoin).

Esimerkki 5.7.1. Derivoidaan $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ implisiittisesti: Sijoitetaan $y = y(x)$ ja derivoidaan yhtälö puolittain muuttujan x suhteen, saadaan

$$2x + 2y(x)y'(x) = 0.$$

Ratkaistaan $y'(x)$:

$$y'(x) = -\frac{x}{y(x)} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\pm\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Huomataan, että derivoimalla lauseke $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ päädytään luonnollisesti samaan tulokseen.

Esimerkki 5.7.2. Määrää käyrän

$$x^2 + xy + 2y^3 - 4 = 0$$

pisteeseen $(-2, 1)$ asetetun tangentin yhtälö.

6. Integraalilaskentaa

6.1. Integraalifunktio

Olkoon $\Delta \subset \mathbb{R}$ avoin väli ja olkoon $f : \Delta \to \mathbb{R}$ funktio. Jos on olemassa funktio $F : \Delta \to \mathbb{R}$ siten, että

$$F'(x) = f(x)$$

kaikilla $x \in \Delta$, niin funktiota F sanotaan f:n *integraalifunktioksi välillä* Δ. Integraalifunktiota, eli määräämätöntä integraalia, merkitään myös $\int f(x)\,dx$. Seuraava tulos osoittaa, että tämä on vakiota vaille yksikäsitteinen merkintä.

Lause 6.1.1. *Olkoon F jokin f:n integraalifunktio välillä Δ. Tällöin $G : \Delta \to \mathbb{R}$ on f:n integraalifunktio jos ja vain jos $G = F + C$ jollakin vakion $C \in \mathbb{R}$ arvolla.*

Todistus. Oletetaan, että $G = F + C$ jollekin $C \in \mathbb{R}$. Koska F on f:n integraalifunktio, niin

$$G'(x) = F'(x) = f(x)$$

kaikilla $x \in \Delta$. Siis G on myös f:n integraalifunktio

Oletetaan kääntäen, että G on f:n integraalifunktio. Koska F on myös f:n integraalifunktio, niin

$$G'(x) = f(x) = F'(x)$$

kaikilla $x \in \Delta$. Määritellään apufunktio $H(x) = G(x) - F(x)$, jolle on siis voimassa $H'(x) = 0$ kaikilla $x \in \Delta$. Olkoot $a, b \in \Delta$ siten, että $a < b$. Koska H on derivoituva välillä Δ, niin se on derivoituva myös välillä $]a, b[$ ja eritoten jatkuva välillä $[a, b]$. Väliarvolauseen nojalla on olemassa vakio $c \in]a, b[$ siten, että

$$H(b) - H(a) = H'(c)(b - a). \tag{6.1}$$

Koska $H'(x) =$ kaikilla $x \in \Delta$, niin erityisesti $H'(c) = 0$. Kaavasta (6.1) saamme näin ollen $H(a) = H(b)$. Koska $a, b \in \Delta$ valittiin mielivaltaisesti, niin H saa saman arvon välin Δ kaikissa pisteissä, eli H on vakiofunktio. Tällöin on olemassa $C \in \mathbb{R}$ siten, että

$$H(x) = C$$

kaikilla $x \in \Delta$. Toisin sanoen, $F(x) = G(x) + C$ kaikilla $x \in \Delta$. □

Jokaisella integroituvalla funktiolla on siis ylinumeroituvasti ääretön määrä integraalifunktioita. Halutun integraalifunktion määräämiseksi tarvitaan vähintään yksi ns. alkuehto, esimerkiksi $F(0) = 1$. Jos alkuehtoja ei ole annettu, niin ratkaisuna ilmoitetaan kaikki integraalifunktiot.

Seuraavat kaavat voidaan todistaa oikeiksi derivoimalla:

$$
\begin{aligned}
\textstyle\int x^\alpha\,dx &= \tfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha\neq -1,\\
\textstyle\int \tfrac{1}{x}\,dx &= \ln|x|+C, \quad x\neq 0\\
\textstyle\int e^x\,dx &= e^x+C,\\
\textstyle\int a^x\,dx &= \tfrac{a^x}{\ln a}+C, \quad a>0,\\
\textstyle\int \sin x\,dx &= -\cos x+C,\\
\textstyle\int \cos x\,dx &= \sin x+C,\\
\textstyle\int \tan x\,dx &= -\ln|\cos x|+C,\\
\textstyle\int \cot x\,dx &= \ln|\sin x|+C,\\
\textstyle\int \tfrac{1}{\cos^2 x}\,dx &= \textstyle\int(1+\tan^2 x)dx=\tan x+C,\\
\textstyle\int \tfrac{1}{\sin^2 x}\,dx &= \textstyle\int(1+\cot^2 x)dx=-\cot x+C,\\
\textstyle\int \sinh x\,dx &= \cosh x+C,\\
\textstyle\int \cosh x\,dx &= \sinh x+C,\\
\textstyle\int \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x+C,\\
\textstyle\int \tfrac{1}{1+x^2}\,dx &= \arctan x+C,\\
\textstyle\int \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C,\\
\textstyle\int \tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+C,\\
\textstyle\int \tfrac{1}{1-x^2}\,dx &= \tfrac{1}{2}\ln\left|\tfrac{1+x}{1-x}\right|+C.
\end{aligned}
$$

Jokaisesta kaavasta saadaan yleisempi versio seuraavien esimerkkien tapaan:

$$
\begin{aligned}
\int f'(x)f(x)^\alpha\,dx &= \frac{f(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \quad \alpha\neq -1,\\
\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx &= \ln|f(x)|+C, \quad f(x)\neq 0,\\
\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f(x)^2}}\,dx &= \ln\left(f(x)+\sqrt{f(x)^2+1}\right)+C.
\end{aligned}
$$

Lemma 6.1.2. *Jos funktioilla f ja g on integraalifunktiot F ja G välillä Δ, niin välillä Δ pätee*

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha F(x)+C$$

ja

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = F(x)+G(x)+C.$$

Edelleen,

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x))+C,$$

jos g on derivoituva välillä Δ.

Todistus. Väitteet seuraavat derivoimissäännöistä ja Lauseesta 6.1.1. Esimerkiksi viimeinen yhtälö pätee, sillä

$$D(F(g(x)+C) = (F\circ g)'(x) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x)$$

kaikilla $x\in\Delta$, $C\in\mathbb{R}$, jos g on derivoituva välillä Δ. □

Esimerkki 6.1.3. Lasketaan kertauksen vuoksi jokunen perusintegraali.

$$\int\left(x^{\frac{5}{2}}-\frac{5}{x^4}-\sqrt{x}\right)dx = \int\left(x^{\frac{5}{2}}-5x^{-4}-x^{\frac{1}{2}}\right)dx = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+\frac{5}{3}x^{-3}-\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$$

$$\int\frac{dx}{7x} = \frac{1}{7}\int\frac{dx}{x} = \frac{1}{7}(\ln|x|+C') = \frac{1}{7}\ln|x|+C$$

$$\begin{aligned}\int(x+1)^4\,dx &= \int u^4\,du \quad (u=x+1,\ du=dx)\\ &= \frac{1}{5}u^5+C = \frac{1}{5}(x+1)^5+C\end{aligned}$$

$$\int\frac{dz}{(z-10)^7} = \int(z-10)^{-7}\,dz = -\frac{1}{6}(z-10)^{-6}+C = -\frac{1}{6(z-10)^6}+C$$

$$\begin{aligned}\int\frac{(3t+4)^2}{\sqrt{t}}\,dt &= \int t^{-\frac{1}{2}}(9t^2+24t+16)\,dt = \int\left(9t^{\frac{3}{2}}+24t^{\frac{1}{2}}+16t^{-\frac{1}{2}}\right)dt\\ &= 9\cdot\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+24\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+16\cdot 2t^{\frac{1}{2}}+C = \frac{18}{5}t^{\frac{5}{2}}+16t^{\frac{3}{2}}+32t^{\frac{1}{2}}+C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}\,dx &= \frac{1}{4}\int(e^{2x}+2+e^{-2x})\,dx = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}e^{2x}+2x-\frac{1}{2}e^{-2x})+C\\ &= \frac{1}{8}(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})+\frac{x}{2}+C\end{aligned}$$

Esimerkki 6.1.4. Edellisen esimerkin viimeisessä kohdassa laskettiin itse asiassa, että

$$\int\cosh^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\cosh(x)\sinh(x)+x\right)+C.$$

Vastaavalla laskulla nähdään, että

$$\int\sinh^2(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\cosh(x)\sinh(x)-x\right)+C.$$

Trigonometristen funktioiden $\cos x$ ja $\sin x$ toiset potenssit voidaan puolestaa integroida kaavojen

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos(2x)) \quad\text{ja}\quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos(2x))$$

avulla seuraavasti:

$$\int\cos^2 x\,dx = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin(2x)+C \quad\text{ja}\quad \int\sin^2 x\,dx = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin(2x)+C.$$

6.2. Integrointitekniikoita

Osittaisintegrointi. Jos f ja g ovat välillä Δ derivoituvia, niin tulon derivoimiskaavasta

$$(fg)' = f'g + fg'$$

saadaan $f'g = (fg)' - fg'$. Integroimalla puolittain, päädytään kaavaan

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx,$$

mikäli $\int f(x)g'(x)\,dx$ on olemassa. Tätä sanotaan *osittaisintegrointikaavaksi*.

Esimerkki 6.2.1. (a) Määrätään $\int \ln x\,dx$ osittaisintegroinnilla. Tätä varten huomataan, että $\ln x = f'(x)g(x)$, missä $f'(x) = 1$ ja $g(x) = \ln x$. Siis $f(x) = x$ ja $g'(x) = \frac{1}{x}$. Osittaisintegrointikaavan mukaan

$$\int 1 \cdot \ln x\,dx = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx = x\ln x - \int 1\,dx = x\ln x - x + C.$$

(b) Soveltamalla osittaisintegrointia kahteen kertaan, saadaan

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\cos x\,dx &= \frac{1}{2}e^{2x}\cos x - \int \frac{1}{2}e^{2x}(-\sin x)\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{2}\int e^{2x}\sin x\,dx \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x}\sin x - \int \frac{1}{2}e^{2x}\cos x\,dx\right) \\ &= \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4}e^{2x}\sin x - \frac{1}{4}\int e^{2x}\cos x\,dx.\end{aligned}$$

Käsittelemällä integraalia $\int e^{2x}\cos x\,dx$ "tuntemattomana", saadaan

$$\frac{5}{4}\int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}e^{2x}\cos x + \frac{1}{4}e^{2x}\sin x,$$

joten

$$\int e^{2x}\cos x\,dx = \frac{2}{5}e^{2x}\cos x + \frac{1}{5}e^{2x}\sin x + C.$$

Integrointi sijoituksen avulla. Olkoon F funktion f integraalifunktio, ja olkoon g derivoituva funktio siten, että $f \circ g$ on määritelty eräällä avoimella välillä. Lemman 6.1.2 mukaan

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) + C.$$

Sijoitetaan oikealle puolelle $x = g(t)$. Saadaan

$$F(g(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Saatiin kaava

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Siis sijoitetaan $x = g(t)$, $dx = g'(t)dt$, integroidaan t:n suhteen ja siirrytään takaisin x:ään ratkaisemalla t x:n avulla yhtälöstä $x = g(t)$, mikä mahdollista.

Esimerkki 6.2.2. Lasketaan
$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}.$$
Jotta integroitava funktio olisi hyvin määritelty, on oltava $x > 0$. Sijoittamalla $x = t^2$ ja $dx = 2t\,dt$, saadaan $\sqrt{x} = t$ ja

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{t^2+t} = \int \frac{2}{1+t}\,dt &= 2\ln|1+t| + C \\ &= \ln(1+t)^2 + C = \ln\left(1+\sqrt{x}\right)^2 + C.\end{aligned}$$

Rationaalifunktioiden integrointi. Tarkastellaan rationaalifunktiota
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$
Rationaalifunktio voidaan aina integroida muodostamalla osamurtokehitelmä.

Jos P:n aste on vähintään Q:n aste, saadaan jakamalla osoittajapolynomi nimittäjäpolynomilla esitys
$$R = P_1 + \frac{P_2}{Q},$$
missä P_1 ja P_2 ovat polynomeja siten, että P_2:n aste on pienempi kuin Q:n aste. Oletetaan tämän vuoksi jatkossa, että P:n aste on pienempi kuin Q:n aste.

1° Oletetaan, että
$$Q(x) = a(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n),$$
missä $x_i \neq x_j$, kun $i \neq j$. Saadaan osamurtokehitelmä
$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_n}{x-x_n},$$
jonka integoiminen tuottaa summan logaritmilausekkeita.

Esimerkki 6.2.3. Lasketaan
$$\int \frac{x+4}{x^3+3x^2-10x}\,dx.$$
Kirjoitetaan rationaalifunktio muodossa
$$\frac{x+4}{x^3+3x^2-10x} = \frac{x+4}{x(x-2)(x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+5}.$$
Oikea puoli saadaan laventamalla muotoon
$$\frac{A(x-2)(x+5) + B(x(x+5)) + C(x(x-2))}{x(x-2)(x+5)}.$$

On siis oltava

$$x + 4 = A(x-2)(x+5) + B(x(x+5)) + C(x(x-2)) \tag{6.2}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Sijoitetaan

$$\begin{array}{llll} x = 0 & \Longrightarrow \quad 4 = -10A & \Longrightarrow & A = -\frac{2}{5}, \\ x = 2 & \Longrightarrow \quad 6 = 14B & \Longrightarrow & B = \frac{3}{7}, \\ x = -5 & \Longrightarrow \ -1 = 35C & \Longrightarrow & C = -\frac{1}{35}. \end{array}$$

Siis

$$\begin{aligned} \int \frac{x+4}{x^3 + 3x^2 - 10x}\,dx &= \int \left(\frac{-\frac{2}{5}}{x} + \frac{\frac{3}{7}}{x-2} + \frac{-\frac{1}{35}}{x+5} \right) dx \\ &= -\frac{2}{5}\ln|x| + \frac{3}{7}\ln|x-2| - \frac{1}{35}\ln|x+5| + C. \end{aligned}$$

Huomautus. Edellisessä esimerkissä yhtälöä (6.2) käsiteltiin sijoitusmenettelyllä. Toinen tapa olisi kirjoittaa kyseisen yhtälön oikea puoli auki polynomiksi, eli

$$\begin{aligned} x + 4 &= A(x^2 + 3x - 10) + Bx^2 + 5Bx + Cx^2 - 2Cx \\ &= (A + B + C)x^2 + (3A + 5B - 2C)x - 10A, \end{aligned}$$

jonka tulisi olla voimassa kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Vertailemalla yhtälössä esiintyviä polynomeja — erityisesti vastaavia x:n potenssien kertoimia — saadaan kolmen yhtälön ja kolmen tuntemattoman yhtälöryhmä

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ 3A + 5B - 2C = 1 \\ -10A = 4. \end{cases}$$

Tästä nähdään heti, että $A = -\frac{2}{5}$. Sijoittamalla A kahteen ylempään yhtälöön, ongelman redusoituu kahden yhtälön ja kahden tuntemattoman (B ja C) yhtälöryhmän ratkaisuun. Tehokkaampien lineaarialgebran menetelmien puuttuessa voidaan nojautua yksinkertaiseen sijoitusmenetelmään, jolloin saadaan lopulta tulokseksi $B = \frac{3}{7}$ ja $C = -\frac{1}{35}$, kuten edellä esitetyssä menetelmässäkin.

2° Jos Q jakaantuu reaalisiin 1. asteen tekijöihin, joiden joukossa on moninkertaisia, niin ko. monikertaista tekijää $(x - x_1)^k$ vastaa osamurtokehitelmässä termi

$$\frac{A_1}{x - x_1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - x_1)^k}.$$

Esimerkki 6.2.4. Lasketaan

$$\int \frac{x+2}{(x-1)^2 x}\,dx.$$

Koska

$$\frac{x+2}{(x-1)^2 x} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x} = \frac{Ax(x-1) + Bx + C(x-1)^2}{x(x-1)^2},$$

niin on oltava

$$x + 2 = Ax(x-1) + Bx + C(x-1)^2 \tag{6.3}$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies 2 = C &&\implies C = 2, \\ x = 1 &\implies 3 = B &&\implies B = 3, \\ x = -1 &\implies 1 = 2A - B + 4C &&\implies A = -2. \end{aligned}$$

Siis

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{(x-1)^2}\,dx &= \int \left(\frac{-2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x} \right) dx \\ &= -2\ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + 2\ln|x| + C \\ &= \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)^2 - \frac{3}{x-1} + C. \end{aligned}$$

Huomautus. Ratkaistaan kertauksen vuoksi vielä edellisen esimerkin osamurtokehitelmässä esiityvät vakiot A, B, C vertailemalla polynomien kertoimia. Yhtälö (6.3) voidaan kirjoittaa muodossa

$$x + 2 = (A + C)x^2 + (B - A - 2C)x + C.$$

Nähdään, että $C = 2$. Tuntemattomat A ja B löydetään seuraavasti:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B - A - 2C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = -2 \\ B = 3. \end{cases}$$

3° Jos Q sisältää jaottoman 2. asteen tekijän $x^2 + px + q$, niin sitä vastaa osamurtokehitelmässä termi

$$\frac{A_1x + A_2}{x^2 + px + q}.$$

Q voi lisäksi sisältää sekä yksinkertaisia että monikertaisia 1. asteen tekijöitä.

Esimerkki 6.2.5. Lasketaan

$$\int \frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x}\,dx.$$

Soveltamalla tapauksia 1° ja 3°, saadaan

$$\frac{x^2 + x + 2}{x^3 + x} = \frac{x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{A(x^2 + 1) + Bx^2 + Cx}{x(x^2 + 1)}.$$

Siis $x^2 + x + 2 = A(x^2 + 1) + Bx^2 + Cx$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla $x = 0$ nähdään, että $A = 2$. Tästä seuraa, että

$$x^2 + x + 2 = 2(x^2 + 1) + Bx^2 + Cx$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$, joten

$$Bx^2 + Cx = x^2 + x + 2 - 2(x^2 + 1) = -x^2 + x$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Siis $B = -1$ ja $C = 1$. Saatiin

$$\frac{x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)} = \frac{2}{x} + \frac{1 - x}{x^2 + 1},$$

joten

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 + x + 2}{x(x^2 + 1)}\, dx &= \int \left(\frac{2}{x} + \frac{1 - x}{x^2 + 1} \right) dx \\
&= 2 \ln |x| + \int \frac{1}{x^2 + 1}\, dx - \int \frac{x}{x^2 + 1}\, dx \\
&= 2 \ln |x| + \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 1}\, dx \\
&= 2 \ln |x| + \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C \\
&= \ln x^2 + \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \arctan x + C \\
&= \ln \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}} + \arctan x + C.
\end{aligned}$$

4° Jos Q sisältää 2. asteen tekijöitä, joiden joukossa on monikertaisia, niin ko. moninkertaista tekijää $x^2 + px + q$ vastaa osamurtokehitelmässä termi

$$\frac{A_1 x + B_1}{x^2 + px + q} + \frac{A_2 x + B_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{A_k x + B_k}{(x^2 + px + q)^k}.$$

Tämä tapaus johtaa laskutoimituksiin, jotka ovat yleensä erittäin työläitä suorittaa käsin. Siksi tapaus sivuutetaan tällä kurssilla.

Huomautus. Joskus integroitava rationaalifunktio R on sellaista muotoa, että osamurtokehitelmää ei tarvita. Tyypillinen tapaus on sellainen, jossa R on muotoa $R = \frac{f'}{f}$, missä f on polynomi. Esimerkiksi integraali

$$I := \int \frac{x^2 + 1}{x(x^2 + 3)}\, dx$$

voitaisiin laskea tapausten 1° ja 3° avulla. Vaihtoehtoisesti voidaan merkitä nimittäjää funktiolla $f(x) = x(x^2 + 3) = x^3 + 3x$, jolloin $f'(x) = 3x^2 + 3$ ja

$$I = \frac{1}{3} \int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \frac{1}{3} \ln |f(x)| + C = \frac{1}{3} \ln |x^3 + 3x| + C.$$

Esimerkissä 6.1.3 selvittiin integraalin $\int \frac{dz}{(z-10)^7}$ laskemisessa ilman osamurtokehitelmää.

Trigonometristen funktioiden integrointi rationaalifunktioiden avulla. Olkoon tarkasteltava integroitava funktio funktioiden $\sin x$ ja $\cos x$ rationaalilauseke. Tällainen integraali palautuu sijoituksella $t = \tan \frac{x}{2}$ rationaalifunktion integraaliksi. Tällöin

$$t = \tan \frac{x}{2} \iff x = 2 \arctan t \quad \text{ja} \quad dx = \frac{2}{1 + t^2}\, dt.$$

Siis

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\\ &= 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = 2\tan\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{1+t^2},\end{aligned}$$

sekä

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Näin ollen

$$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{ja} \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Esimerkiksi:

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\cos x}\,dx &= \int\frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\\ &= \int\frac{1+t^2}{1+t^2+1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\\ &= \int 1\,dt = t + C = \tan\frac{x}{2} + C.\end{aligned}$$

6.3. Integroituvuuden määritelmä

Luvut $x_0, x_1, \dots, x_n$ muodostavat välin $[a,b]$ *jaon*, jos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Funktio $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ on *porrasfunktio*, eli paloittain vakiofunktio, jos on olemassa välin $[a,b]$ jako $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ja vakiot $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ siten, että $\varphi(x) = c_k$, kun $x_{k-1} < x < x_k$, $k = 1, \dots, n$. Jakopisteissä x_k määritellään joko $\varphi(x_k) = c_k$ tai $\varphi(x_k) = c_{k-1}$.

Määritelmä 6.3.1. Lukua

$$I(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$$

sanotaan *porrasfunktion* φ *integraaliksi.* Merkitään myös

$$I(\varphi) = \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Huomautus. Jokaiseen porrasfunktioon liittyy tietty välin $[a,b]$ jako. Jos φ ja ψ ovat porrasfunktioita välillä $[a,b]$, niin tarvittaessa jakoja tihentämällä voidaan olettaa, että φ ja ψ liittyvät samaan jakoon.

Sopimus. Jos φ on porrasfunktio välillä $[a,b]$ ja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on funktio, ilmauksella $\varphi(x) \le f(x)$ (vast. $\varphi(x) \ge f(x)$) kaikilla $x \in [a,b]$ tarkoitetaan sitä, että epäyhtälö pätee porrasfunktion jakopisteiden ulkopuolella. Lyhyesti ilmaistuna $\varphi \le f$ (vast. $\varphi \ge f$).

Lemma 6.3.2. *Olkoot φ ja ψ porrasfunktioita välillä $[a,b]$ ja olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Tällöin:*

(i) $\displaystyle\int_a^b \alpha\varphi(x)\,dx = \alpha \int_a^b \varphi(x)\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (\varphi(x)+\psi(x))\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx.$

(iii) Jos $\varphi(x) \le \psi(x)$ kaikilla $x \in [a,b]$, niin $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)\,dx \le \int_a^b \psi(x)\,dx.$

(iv) Kaikilla $a<c<b$ pätee $\displaystyle\int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^c \varphi(x)dx + \int_c^b \varphi(x)dx.$

Määritelmä 6.3.3. Olkoon f välillä $[a,b]$ määritelty rajoitettu funktio. Funktio f on *(Riemann-)integroituva* välillä $[a,b]$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa porrasfunktiot φ ja ψ välillä $[a,b]$ siten, että $\varphi \le f \le \psi$ välillä $[a,b]$ ja

$$I(\psi) - I(\varphi) < \varepsilon.$$

Huomautus. Funktion f integroituvuus tarkoittaa sitä, että f:n *kuvaaja* voidaan peittää koordinaattiakselien suuntaisilla suorakulmioilla, joiden yhteenlaskettu pinta-ala voidaan tehdä mielivaltaisen pieneksi.

Lause 6.3.4. *Olkoon f integroituva välillä $[a,b]$. Tällöin on olemassa täsmälleen yksi luku $\lambda \in \mathbb{R}$ siten, että*

$$I(\varphi) \le \lambda$$

kaikilla porrasfunktioilla φ, joille $\varphi \le f$ välillä $[a,b]$, ja

$$I(\psi) \ge \lambda$$

kaikilla porrasfunktioilla ψ, joille $\psi \ge f$ välillä $[a,b]$.

Todistus. Todistetaan luvun λ olemassaolo — yksikäsitteisyys todistetaan harjoitustehtävänä. Olkoon $\mathcal{A}$ kaikkien niiden porrasfunktioiden φ joukko, jotka toteuttavat ehdon $\varphi \le f$ välillä $[a,b]$. Olkoon edelleen

$$A = \{\, I(\varphi) : \varphi \in \mathcal{A} \,\}.$$

Jos ψ on porrasfunktio siten, että $\psi \ge f$ välillä $[a,b]$, niin $I(\varphi) \le I(\psi)$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{A}$ (Lemma 6.3.2 (iii)). Tästä seuraa, että A on ylhäältä rajoitettu joukko. Siis joukolla A on pienin yläraja, eli on olemassa $\sup A \in \mathbb{R}$.

Osoitetaan, että luku $\lambda = \sup A$ toteuttaa lauseen ehdon:

(1) Koska λ on A:n yläraja, niin $I(\varphi) \le \lambda$ kaikille porrasfunktioille φ siten, että $\varphi \le f$ välillä $[a,b]$.

(2) Jos ψ on porrasfunktio siten, että $\psi \ge f$ välillä $[a,b]$, niin $I(\varphi) \le I(\psi)$ kaikilla $\varphi \in \mathcal{A}$. Siis $I(\psi)$ on eräs joukon A yläraja. Koska $\lambda = \sup A$ on pienin yläraja, niin $\lambda \le I(\psi)$.

Kohdista (1) ja (2) seuraa, että λ toteuttaa vaaditun ehdon. □

Määritelmä 6.3.5. Olkoon f välillä $[a,b]$ integroituva funktio. Lauseen 6.3.4 yksikäsitteistä lukua λ sanotaan funktion f *(Riemann-)integraaliksi* yli välin $[a,b]$. Luvulle λ käytetään merkintää

$$\lambda = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Geometrinen tulkinta. Integroituvuuden lähtökohtana on, että välillä $[a,b]$ määritellylle positiiviselle funktiolle f luku $\int_a^b f(x)\,dx$ antaa kuvaajan $y = f(x)$ ja x-akselin välisen alueen pinta-alan välillä $[a,b]$. Jos f on negatiivinen, niin integraali $\int_a^b f(x)\,dx$ antaa kuvaajan $y = f(x)$ ja x-akselin välisen alueen pinta-alan vastaluvun välillä $[a,b]$. Yleisesti x-akselin yläpuolella olevat alueiden pinta-alat lasketaan mukaan positiivisena ja x-akselin alapuolella olevat alueet lasketaan mukaan negatiivisena.

Jatkuvan funktion integroituvuus. Heine-Borelin lauseen avulla (eli välin $[a,b]$ kompaktisuuden avulla) voidaan todistaa seuraava tärkeä lause:

Lause 6.3.6. *Suljetulla välillä $[a,b]$ jatkuva funktio on integroituva välillä $[a,b]$.*

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$. Heine-Borelin lauseen avulla avulla voidaan todistaa (asian tarkastelu sivuutetaan tässä): On olemassa $\delta > 0$ siten, että ehdoista $x, y \in [a,b]$, $|x-y| < \delta$, seuraa

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \tag{6.4}$$

Valitaan välin $[a,b]$ jako $D:\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ siten, että osavälien pituudet toteuttavat ehdon $x_k - x_{k-1} < \delta$ kaikilla $k = 1,\ldots,n$. Olkoon $m_k = \max f([x_{k-1}, x_k])$ funktion f pienin arvo ja $M_k = \max f([x_{k-1}, x_k])$ funktion f suurin arvo välillä $[x_{k-1}, x_k]$, kun $k = 1,\ldots,n$. Ehdosta (6.4) seuraa, että

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

kaikilla $k = 1,\ldots,n$.

Määritellään porrasfunktiot φ ja ψ siten, että kaikilla $k = 1,\ldots,n$

$$\varphi(x) = m_k \quad \text{kun} \quad x_{k-1} < x < x_k$$

ja

$$\psi(x) = M_k \quad \text{kun} \quad x_{k-1} < x < x_k.$$

Tällöin $\varphi \le f \le \psi$ välillä $[a,b]$. Edelleen

$$\begin{aligned} I(\psi) - I(\varphi) &= \sum_{k=1}^n M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Määritelmän 6.3.3 mukaan f on integroituva välillä $[a,b]$. □

Huomautus. Oleellisesti samalla tavalla voidaan todistaa yleisempi tulos: Jos rajoitetulla funktiolla $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia, niin f on integroituva välillä $[a,b]$.

6.4. Määrätyn integraalin perusominaisuudet

Seuraavat integraalin perusominaisuudet perustuvat siihen, että vastaavat tulokset pätevät porrasfunktioille, ja että yleisiä integraaleja voidaan approksimoida porrasfunktioiden integraaleilla.

Lause 6.4.1. *Olkoot f ja g välillä $[a, b]$ integroituvia funktioita. Tällöin myös $f + g$ ja αf ovat integroituvia välillä $[a, b]$ kaikilla $\alpha \in \mathbb{R}$. Edelleen:*

(i) $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$

(ii) $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

(iii) Jos $f(x) \le g(x)$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

(iv) Jos $a < c < b$, niin f on integroituva väleillä $[a, c]$ ja $[c, b]$, sekä

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Todistus. Todistetaan malliksi väite (ii). Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska f ja g ovat integroituvia, niin on olemassa porrasfunktiot $\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2$ välillä $[a, b]$ siten, että

$$\varphi_1(x) \le f(x) \le \psi_1(x) \quad \text{ja} \quad \varphi_2(x) \le g(x) \le \psi_2(x)$$

kaikilla $x \in [a, b]$ sekä

$$I(\psi_1) - I(\varphi_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{ja} \quad I(\psi_2) - I(\varphi_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tällöin $\varphi_1 + \varphi_2$ ja $\psi_1 + \psi_2$ ovat porrasfunktioita siten, että

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) \le f(x) + g(x) \le \psi_1(x) + \psi_2(x)$$

kaikilla $x \in [a, b]$ ja Lemman 6.3.2 (ii) mukaan mukaan

$$\begin{aligned} I(\psi_1 + \psi_2) - I(\varphi_1 + \varphi_2) &= I(\psi_1) + I(\psi_2) - I(\varphi_1) - I(\varphi_2) \\ &= (I(\psi_1) - I(\varphi_1)) + (I(\psi_2) - I(\varphi_2)) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Määritelmän 6.3.3 mukaan $f + g$ on integroituva välillä $[a, b]$. Edelleen

$$I(\varphi_1 + \varphi_2) \le \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx \le I(\psi_1 + \psi_2)$$

ja

$$I(\varphi_1 + \varphi_2) = I(\varphi_1) + I(\varphi_2) \le \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \le I(\psi_1) + I(\psi_2) = I(\psi_1 + \psi_2).$$

Näistä epäyhtälöistä seuraa, että

$$0 \le \left| \int_a^b (f(x) + g(x))\,dx - \left(\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \right) \right| \le I(\psi_1 + \psi_2) - I(\varphi_1 + \varphi_2) < \varepsilon.$$

Koska $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen, niin on oltava

$$\left| \int_a^b (f(x) + g(x))\, dx - \left(\int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx \right) \right| = 0,$$

eli

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx,$$

ja väite (ii) on todistettu. □

Lauseen 6.4.1 väitteet (iii) ja (iv) ovat intuitiivisestikin uskottavia integraalin pinta-ala-tulkinnan pohjalta. Tämä on tilanne myös seuraavan lauseen väitteiden kanssa.

Lause 6.4.2. *Olkoot f ja g integroituvia välillä $[a, b]$.*

(i) Jos $m \leq f(x) \leq M$ kaikilla $x \in [a, b]$, niin

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a).$$

(ii) Tällöin myös $|f|$ on integroituva ja

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

6.5. Määrätyn integraalin ja integraalifunktion yhteys

Sopimus. Sovitaan siitä, että

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

ja

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad a < b.$$

Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integroituva funktio. Tällöin f on integroituva jokaisella välillä $[a, x]$, $a < x \leq b$, ja voidaan määritellä funktio $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Lemma 6.5.1. *Funktio F on jatkuva välillä $[a, b]$.*

Todistus. Määritelmän mukaan integroituvat funktiot ovat rajoitettuja. Siis on olemassa $M > 0$ siten, että $|f(t)| \leq M$ kaikilla $t \in [a, b]$. Olkoon $\varepsilon > 0$ ja olkoot $x, y \in [a, b]$ siten, että $x < y$. Lauseiden 6.4.1 ja 6.4.2 mukaan

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_a^y f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right| = \left| \int_a^x f(t)\, dt + \int_x^y f(t)\, dt - \int_a^x f(t)\, dt \right| \\ &= \left| \int_x^y f(t)\, dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|\, dt \leq \int_x^y M\, dt = M(y - x) < \varepsilon, \end{aligned}$$

kun

$$|y - x| = y - x < \delta := \frac{\varepsilon}{M}.$$

Siis F on oikealta jatkuva pisteessä $x \in [a, b[$. Samalla tavalla osoitetaan, että F on vasemmalta jatkuva jokaisessa pisteessä $x \in]a, b]$. □

Lause 6.5.2. *Jos f on jatkuva pisteessä $x_0 \in]a, b[$, niin F on derivoituva pisteessä x_0 ja*

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Välin päätepisteissä vastaava väite pätee vasemman- ja oikeanpuoleisille derivaatoille.

Seuraus 6.5.3. *Jos $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ on jatkuva, niin funktio $F : [a, b] \to \mathbb{R}$,*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

on funktion f integraalifunktio välillä $[a, b]$.

Analyysin peruslause. *Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$ ja F on jokin f:n integraalifunktio välillä $[a, b]$, niin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) =: \Big/_a^b F(x).$$

Huomautus. Olkoon f jatkuva ja g derivoituva funktio. Tällöin

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f\left(g(x)\right) g'(x).$$

Tämän todistamiseksi olkoon F jokin funktion f integraalifunktio. Analyysin peruslauseen mukaan

$$\int_a^{g(x)} f(t)\,dt = \Big/_a^{g(x)} F(t) = F(g(x)) - F(a),$$

joten

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)\,dt\right) = F'(g(x))g'(x) = f(g(x))g'(x).$$

Samalla tavalla todistetaan ns. Leibnizin kaava, jonka mukaan

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)\,dt\right) = f(g(x))g'(x) - f(h(x))h'(x).$$

Integraalilaskennan väliarvolause. *Jos f on jatkuva välillä $[a, b]$, niin on olemassa $c \in]a, b[$ siten, että*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Todistus. Analyysin peruslauseen mukaan

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{6.5}$$

missä F on (jokin) f:n integraalifunktio välillä $[a, b]$. Koska F on derivoituva välillä $[a, b]$ (päätepisteissä toispuoleisesti), niin väliarvolauseen mukaan löytyy $c \in]a, b[$, jolle

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b - a) = f(c)(b - a). \tag{6.6}$$

Väite seuraa yhdistämällä kaavat (6.5) ja (6.6). □

Integraalilaskennan väliarvolauseen geometrinen tulkinta. Muodostetaan suorakulmio, jonka kanta on $b - a$ ja korkeus h siten, että suorakulmion ala on sama kuin f:n kuvaajan ja x-akselin rajoittaman alueen pinta-ala. Tällöin

$$h(b - a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

eli $h = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$. Siis väliarvolauseen $f(c)$ on sama kuin korkeus h. Lukua $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ sanotaan f:n *integraalikeskiarvoksi* välillä $[a, b]$.

Määrätyn integraalin laskeminen osittaisintegroimalla ja sijoittamalla. Olkoot f ja g välillä $[a, b]$ jatkuvasti derivoituvia funktioita. Tällöin

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx &= \int_a^b (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))\,dx \\ &= \int_a^b D(f(x)g(x))\,dx = \Big/_a^b f(x)g(x).\end{aligned}$$

Siis

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx = \Big/_a^b f(x)g(x) - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

Esimerkiksi:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \Big/_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot x - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \frac{\pi}{4} + \Big/_0^{\frac{\pi}{4}} \ln|\cos x| \\ &= \frac{\pi}{4} + \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

Lause 6.5.4. *Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja olkoon $g : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ jatkuvasti derivoituva funktio siten, että $g(\alpha) = a$ ja $g(\beta) = b$. Tällöin*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt.$$

Todistus. Olkoon F jokin f:n integraalifunktio välillä $[a,b]$. Lemman 6.1.2 mukaan välillä $[\alpha,\beta]$ pätee

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = F(g(t)) + C.$$

Näin ollen analyysin peruslauseen nojalla

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt &= \Big/_{\!\!\alpha}^{\beta} F(g(t)) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha))\\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx,\end{aligned}$$

ja väite on todistettu. □

Huomautus. Lause 6.5.4 pätee myös tapauksessa $b \le a$. Siis sijoitetaan $x = g(t)$ ja $dx = g'(t)\,dt$ ja ratkaistaan rajat t:n suhteen yhtälöistä $g(t) = a$ ja $g(t) = b$. Jos g^{-1} on olemassa, niin $\alpha = g^{-1}(a)$ ja $\beta = g^{-1}(b)$.

Esimerkki 6.5.5. Lasketaan

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

sijoittamalla $x = \sin t$, $dx = \cos t\,dt$. Tässä kannattaa tarkastella sinin päähaaraa, eli $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Yhtälöiden $\sin t = -1$ ja $\sin t = 1$ ratkaisuiksi t:n suhteen saadaan $-\frac{\pi}{2}$ ja $\frac{\pi}{2}$ (vastaavassa järjestyksessä). Siis

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sqrt{1-\sin^2 t}\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sqrt{\cos^2 t}\,dt\\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \Big/_{\!\!-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi - \left(-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin(-\pi)\right) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Vaihtamalla x ja t Lauseessa 6.5.4, saadaan

Lause 6.5.6. *Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja olkoon $g : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ jatkuvasti derivoituva funktio siten, että $g(\alpha) = a$ ja $g(\beta) = b$. Tällöin*

$$\int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)\,dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)\,dt.$$

Todistus. Olkoon F funktion f integraalifunktio välillä $[a,b]$. Lemman 6.1.2 nojalla välillä $[\alpha,\beta]$ pätee

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + C.$$

Analyysin peruslauseen mukaan

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x)\,dx = \Big/_{\!\alpha}^{\beta} F(g(x)) = F(g(b)) - F(g(a)) = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)\,dt,$$

ja väite on todistettu. □

Huomautus. Myös Lauseessa 6.5.6 voi olla $g(\beta) \leq g(\alpha)$. Siis sijoitetaan $t = g(x)$, $dt = g'(x)\,dx$ ja otetaan rajoiksi t:n suhteen $g(\alpha)$ ja $g(\beta)$.

Esimerkki 6.5.7. Lasketaan

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$$

sijoittamalla $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$. Rajat t:n suhteen ovat $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ ja $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$. Siis

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx = \int_0^0 (-1)\cdot\frac{1}{2+t}\,dt = 0.$$

Lauseen 6.5.6 merkinnöin yllä olevassa ratkaisussa on valittu $g(x) = \cos x$ ja $f(x) = -\frac{1}{2+x}$, jolloin $f(g(x))g'(x) = \frac{\sin x}{2+\cos x}$.

6.6. Määrätyn integraalin sovelluksia

Kertymäfunktio. Tarkastellaan jatkuvan funktion määrättyä integraalia ylärajansa funktiona:

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Jos funktio f ilmoittaa jonkin suureen kasvunopeuden, niin sen integraalifunktio F, jolle $F(x_0) = 0$, ilmoittaa pisteen x_0 jälkeen kertyneen määrän ko. suureelle. Funktiota

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$$

kutsutaan siten *kertymäfunktioksi.*

Esimerkki 6.6.1. Jos $v = v(t)$ on kappaleen nopeus, niin

$$s(x) = \int_{t_0}^{x} v(t)\,dt$$

ilmoittaa aikavälillä $[t_0, x]$ kappaleen kulkeman matkan. Vastaavasti, jos q on tuotantonopeusfunktio, niin

$$Q(x) = \int_{t_0}^{x} q(t)\,dt$$

ilmoittaa aikavälillä $[t_0, x]$ tuotetun määrän.

Voidaan siis muodostaa integroimalla funktio, josta eri arvoja vastaavat tulokset saadaan sijoituksella sen sijaan, että joka kerran integroitaisiin uudestaan.

Pinta-ala ja kaaren pituus. Jos $f(x) \geq 0$, niin käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin sekä suorien $y = a$ ja $y = b$ rajoittaman alueen pinta-ala on

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Jos taas $f(x) \leq 0$, niin käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin sekä suorien $y = a$ ja $y = b$ väliin jäävän alueen pinta-ala on

$$A = -\int_a^b f(x)\, dx.$$

Käyrien $y = f(x)$ ja $y = g(x)$ väliin jäävän alueen pinta-ala välillä $[a, b]$ on

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx.$$

Käyrän $y = f(x)$, missä f' on olemassa ja jatkuva välillä $]a, b[$, väliä $[a, b]$ vastaavan kaaren pituus saadaan laskettua kaavasta

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Funktion keskiarvo. Jos f on suljetulla välillä $[a, b]$ jatkuva funktio, niin funktion f keskiarvo välillä $[a, b]$ on

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Keskiarvon olemassaolo seuraa integraalilaskennan väliarvolauseesta.

Geometrisesti: Jos $f \geq 0$, niin $\overline{f}$ on sen suorakulmion korkeus, jonka kanta on $b - a$ ja pinta-ala sama kuin käyrän $y = f(x)$ ja x-akselin sekä suorien $y = a$ ja $y = b$ rajoittaman alueen pinta-ala.

Pyörähdyskappaleet. Kun funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kuvaaja pyörähtää x-akselin ympäri, niin syntyvän pyörähdyskappaleen tilavuus V ja vaipan ala A saadaan kaavoista

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx$$

ja

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Esimerkki 6.6.2. Lasketaan käyrän $y = x^3 + 1$, $-1 \leq x \leq 2$, x-akselin ympäri pyörähtäessä syntyvän kappaleen tilavuus. Nyt

$$V = \pi \int_{-1}^2 (x^3 + 1)^2\, dx = \ldots = \pi \cdot 28\frac{13}{14}.$$

6.7. Epäoleellinen integrointi

Integraaleja, joissa integrointiväli ei ole rajoitettu tai integroitava funktio on epäjatkuva, sanotaan *epäoleellisiksi* integraaleiksi. Nimestään huolimatta epäoleelliset integraalit ovat hyvinkin oleellisia sekä matematiikassa että sovelluksissa. Aihetta tutkitaan tarkemmin kurssilla Analyysi III.

Integrointi rajoittamattomalla välillä. Tarkastellaan motivoivaa esimerkkiä ennen varsinaisen määritelmän esittämistä:

Esimerkki 6.7.1. Oletetaan, että kappaleen nopeus v noudattaa riippuvuutta

$$v(t) = \frac{2}{t^2},$$

missä $t > 0$. Jos $t_0 = 1$, niin kuljettua matkaa kuvaa funktio

$$s(x) = \int_{t_0}^{x} v(t)\,dt = \int_{1}^{x} 2t^{-2}\,dt = -\frac{2}{x} + 2.$$

Huomataan, että kappale ei koskaan pääse kahden yksikön päähän vaikka aikaa kuluisi kuinka paljon, mutta

$$\lim_{x\to\infty} s(x) = \ldots = 2.$$

Määritelmä 6.7.2. Olkoon funktio f ja g jatkuvia funktioita väleillä $[a, \infty[$ ja $]-\infty, b]$ vastaavasti. Tällöin

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$$

ja

$$\int_{-\infty}^{b} g(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b g(x)\,dx,$$

mikäli raja-arvot ovat olemassa.

Integrointi epäjatkuvuuskohdissa. Jos integroimisrajat ovat äärelliset, mutta funktio ei ole jatkuva toisessa päätepisteessä, niin integrointi suoritetaan seuraavasti:

Määritelmä 6.7.3. Olkoon funktio f jatkuva välillä $[a, b[$ ja epäjatkuva pisteessä b. Tällöin

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx,$$

mikäli raja-arvo on olemassa. Edelleen, jos funktio g on jatkuva välillä $]a, b]$ ja epäjatkuva pisteessä a, niin

$$\int_a^b g(x)\,dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b g(x)\,dx,$$

mikäli raja-arvo on olemassa.

Esimerkiksi:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{c\to 0^+} \int_c^2 x^{-\frac{1}{2}}dx = \lim_{c\to 0^+} \Big/_c^2 2x^{\frac{1}{2}} = \lim_{c\to 0^+} \left(2\sqrt{2} - 2\sqrt{c}\right) = 2\sqrt{2}.$$