Johdatus topologiaan
Kevät 2009
Harjoitus 1 (viikko 4)

1. Olkoot A ja B mielivaltaisia pistejoukkoja. Osoita, että $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$
   (a) Venn-diagrammin avulla,
   (b) osoittamalla joukot A ja $(A \setminus B) \cup (A \cap B)$ toistensa osajoukoiksi.

2. Olkoon M joukko, ja olkoon $\{A_j\}_{j \in I}$ kokoelma sen osajoukkoja, missä I on mielivaltainen indeksijoukko. Osoita, että
$$M \setminus \cap_{j \in I} A_j = \cup_{j \in I} (M \setminus A_j) .$$
   Opastus: Katso mallia Esimerkin 2.1 ratkaisusta.

3. Avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritellään pisteen $\overline{a}$ kautta kulkeva vektorin $\overline{v}$ suuntainen suora joukkona
$$\{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \overline{x} = \overline{a} + t\overline{v},\ t \in \mathbb{R}\}.$$
   Osoita, että yhtälöt
$$\overline{x} = (1, 2, -2, -5) + t(1, -1, 2, 1), \quad t \in \mathbb{R},$$
   ja
$$\overline{x} = (2, 1, 0, -4) + t(-2, 2, -4, -2), \quad t \in \mathbb{R},$$
   esittävät samaa suoraa avaruudessa $\mathbb{R}^4$.

4. Olkoon $n \geq 2$, ja olkoon $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektori. Osoita, että on olemassa vektori $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, $\overline{y} \neq \overline{0}$, siten, että $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0$.
   Opastus: Tarkastele erikseen tapaukset $x_1 = 0$ ja $x_1 \neq 0$.

5. Olkoot $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että
$$||\overline{x} + \overline{y}||^2 + ||\overline{x} - \overline{y}||^2 = 2||x||^2 + 2||y||^2.$$
   Mitä kyseinen väite tarkoittaa geometrisesti tapauksessa $n = 2$?

6. Osoita määritelmän avulla, että
$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1.$$