Johdatus topologiaan
Kevät 2009
Harjoitus 2 (viikko 5)

---

1. Olkoot $A \subset \mathbb{R}^n$ ja $B \subset \mathbb{R}^n$ avoimia joukkoja. Osoita määritelmän avulla, että joukot $A \cup B$ ja $A \cap B$ ovat avoimia.

2. Olkoot $C \subset \mathbb{R}^n$ ja $D \subset \mathbb{R}^n$ suljettuja joukkoja. Osoita Tehtävän 1 tuloksen avulla, että joukot $C \cup D$ ja $C \cap D$ ovat suljettuja.

3. Osoita Lauseen 4.16 avulla, että yhden pisteen joukko $A = \{\overline{a}\}$, missä $\overline{a} \in \mathbb{R}^n$, on suljettu.

4. Perustele, miksi avaruuden $\mathbb{R}^2$ osajoukko
$$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 1,\ x_2 = 2\}$$
ei ole avoin eikä suljettu.

5. Piirrä tason $\mathbb{R}^2$ osajoukko
$$A = \overline{B}((0,0),1) \setminus \overline{B}((1,0),1),$$
kun tasoon on liitetty standardi etäisyys $||\cdot||$. Merkitse kuvaan joukon A sisäpisteet, reunapisteet ja ulkopisteet. (Tenttitehtävä, kevät 2008.)

6. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ joukko, ja olkoon $\overline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Osoita, että $\overline{x} \in \mathrm{Bd}\,(A)$, jos ja vain jos $\overline{x}$ on joukon A kasaantumispiste.

7. Osoita, että $\mathbb{N}^2$ on joukon $\mathbb{R}^2$ ääretön osajoukko, jolla ei ole yhtään kasaantumispistettä. Hahmottele joukkoa $\mathbb{N}^2$ xy-koordinaatistoon.

   Opastus: Osoita, että jos $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{N}^2$ siten, että $\overline{x} \neq \overline{y}$, niin $||\overline{x} - \overline{y}|| \geq 1$. Tästä on seurauksena, että jos $\overline{z} \in \mathbb{R}^2$, niin pallo $B(\overline{z}, \frac{1}{2})$ sisältää korkeintaan yhden joukon $\mathbb{N}^2$ pisteen, sillä $\mathrm{diam}\,(B(\overline{z}, \frac{1}{2})) = 1$.