Johdatus topologiaan
Kevät 2009
Harjoitus 3 (viikko 6)

---

1. Olkoon $f : M \to \mathbb{R}$ injektio ja $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$, kun $x, y \in M$. Onko d joukon M metriikka?

2. Olkoot $d_1(x, y) = |x^2 - y^2|$ ja $d_2(x, y) = |x^3 - y^3|$, kun $x, y \in \mathbb{R}$. Osoita, että d_1 ei ole metriikka ja d_2 on metriikka joukossa $\mathbb{R}$.

3. Olkoot d_1 ja d_2 metriikkoja joukossa M. Osoita, että kuvaukset

   (a) $(d_1 + d_2)(x, y) = d_1(x, y) + d_2(x, y)$,

   (b) $\max(d_1, d_2)(x, y) = \max\{d_1(x, y), d_2(x, y)\}$

   ovat myös metriikkoja joukossa M.

4. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $x, y \in M$, $x \neq y$. Osoita, että on olemassa avoimet joukot $U \subset M$ ja $V \subset M$ siten, että $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ ja $y \in V$.

5. Olkoon (M, d) metrinen avaruus ja $x \in M$. Olkoon $0 < r < s$. Osoita, että joukko

   $$A = \{y \in M : r < d(x, y) < s\}$$

   on avoin.

   Huomautus. Joukkoa A kutsutaan avoimeksi ympyrärenkaaksi (open annulus).

6. Osoita määritelmän avulla, että

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1,$$

   missä raja-arvo otetaan Teht. 2 esiintyneen metriikan $d(x, y) = |x^3 - y^3|$ suhteen.

   Opastus: Osoita, että jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että $d\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}, 1\right) < \varepsilon$ kaikilla $n \geq N(\varepsilon)$. Vertaa Harj. 1/Teht. 6.