
Johdatus topologiaan

Kevät 2009

Harjoitus 4 (viikko 7)

Tiedotteita: • Kansainvälisten asiain koordinaattori, Merja Kuokkanen, pitää opiskelijavaihtoon liittyvän noin 10 min kestävän infotilaisuuden luennon alussa MA 9.2. • Luento peruttu MA 16.2 työmatkan takia. Laskuharjoitukset pidetään kuitenkin normaalisti. Korvaava luento MA 2.3 klo 12–14 salissa M103, joka on samalla kurssin päätösluento.

1. Pisteiden $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $Q = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ välinen Euklidinen etäisyys on

$$d_1(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Tasossa \mathbb{R}^2 voidaan määritellä myös muita etäisyysfunktioita, esim.

$$d_2(\bar{x}, \bar{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\} \quad \text{ja} \quad d_3(\bar{x}, \bar{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

Kirjoita origokeskiset yksikköpallot $B_{d_j}(\bar{0}, 1)$, $j = 1, 2, 3$, pistejoukkoina, sekä piirrä niiden kuvat.

2. Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Olkoon $\{x_n\}$ jono joukon M pisteitä, ja olkoon $x \in M$. Osoita, että $x_n \rightarrow x$ jos ja vain jos $d(x, x_n) \rightarrow 0$.

3. Osoita, että metrisen avaruuden suljettu pallo on suljettu joukko

- (a) Lauseen 7.4 avulla;
- (b) suljetun joukon määritelmän avulla.

4. Olkoon $B(x, r)$ erään metrisen avaruuden avoin pallo, $\bar{B}(x, r)$ vastaava suljettu pallo, ja $\overline{B(x, r)}$ ko. avoimen pallon sulkeuma. Osoita, että $\bar{B}(x, r) = \overline{B(x, r)}$.

5. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $x, y \in M$, $x \neq y$. Osoita, että on olemassa avoimet joukot $U \subset M$ ja $V \subset M$ siten, että $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$, $x \in U$ ja $y \in V$.

Opastus: Kyseinen tulos on yleisempi kuin Harjoitusten 3 Tehtävän 4 tulos. Tässä yhteydessä kannattaa käyttää tietoa, että avoimen pallon sulkeuma on sama kuin suljettu pallo, ks. Tehtävä 4 yllä.

6. Tarkastellaan reaalilukujen ja itseisarvon muodostamaa metristä avaruutta $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Olkoon $A =]0, 2]$ ja $U =]1, 2]$. Joukko U ei ole avoin eikä suljettu joukossa \mathbb{R} . Osoita, että joukko U on kuitenkin avoin joukossa A

- (a) Lauseen 7.7 avulla;
- (b) avoimen joukon määritelmän avulla.