Johdatus topologiaan
Kevät 2009
Harjoitus 5 (viikko 8)

1. Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Olkoot $A, B \subset M$ siten, että $A \subset B$. Osoita, että tällöin $\operatorname{Int}(A) \subset \operatorname{Int}(B)$.

2. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $A \subset M$. Osoita, että A on avoin jos ja vain jos $A \cap \operatorname{Bd}(A) = \emptyset$.

3. Osoita, että joukon $\mathbb{R}^2$ metriikat $d_T(\overline{x}, \overline{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$ (taksiautoetäisyys) ja $d(\overline{x}, \overline{y}) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$ ovat ekvivalentteja, missä $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\overline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

4. Funktiota $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, joka toteuttaa Esimerkin 10.4 ehdot (P1)–(P4), kutsutaan mittausfunktioksi. Ehtoa (P5) ei tässä yhteydessä tarvita. Huomaa, että mittausfunktion ei välttämättä tarvitse olla edes jatkuva.

   Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mielivaltainen mittausfunktio. Osoita, että $d' = \varphi \circ d$ on metriikka joukossa M. (Vrt. Esim. 10.5.)

5. Osoita määritelmän avulla, että

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} = 1,$$

   missä raja-arvo otetaan metriikan $d(x, y) = |e^x - e^y|$ suhteen. Huomaa, että funktio $f(x) = e^x$ on injektio, joten d todellakin on metriikka Harj. 3/Teht. 1 mukaan.

6. Olkoot X ja Y joukkoja, sekä $f : X \to Y$ kuvaus. Olkoon $\{A_j\}_{j\in I}$ kokoelma X:n osajoukkoja, missä I on mielivaltainen indeksijoukko. Osoita seuraavien väitteiden paikkansapitävyys.

   (a) $f\left(\cup_{j\in I} A_j\right) = \cup_{j\in I} f\left(A_j\right)$;

   (b) $f\left(\cap_{j\in I} A_j\right) \subset \cap_{j\in I} f\left(A_j\right)$.

7. Osoita, että käänteinen inkluusio Teht. 6 kohdassa (b) ei yleisesti ole voimassa tarkastelemalla funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, sekä joukkoja $A_1 = [-1, 0]$ ja $A_2 = [0, 1]$.