

---

## Johdatus topologiaan

Kevät 2009

### Harjoitus 6 (viikko 9)

---

1. Olkoot  $X$  ja  $Y$  joukkoja, sekä  $f : X \rightarrow Y$  kuvaus. Olkoon  $\{B_j\}_{j \in I}$  kokoelma  $Y$ :n osajoukkoja, missä  $I$  on mielivaltainen indeksijoukko. Osoita seuraavien alkukuvajoukkoihin liittyvien väitteiden paikkansapitävyys.

(a)  $f^{-1}(\cup_{j \in I} B_j) = \cup_{j \in I} f^{-1}(B_j)$ ;

(b)  $f^{-1}(\cap_{j \in I} B_j) = \cap_{j \in I} f^{-1}(B_j)$ .

*Opastus:* Esimerkiksi joukon  $B \subset Y$  alkukuvajoukko on

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\} \subset X.$$

2. Olkoon  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  injektio ja  $\mathbb{R}$ :n standardin metriikan suhteen jatkuva. Mitä on

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1},$$

kun raja-arvo otetaan metriikan  $d(x, y) = |f(x) - f(y)|$  suhteen? Perustele tarkasti missä vaiheessa tarvitset oletuksia ”injektio” ja ”jatkuva”.

3. Olkoon  $(M, d)$  metrinen avaruus, ja olkoon  $a \in M$ . Osoita, että funktio  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = d(a, x)$ , on jatkuva.

*Opastus:* Osoita jatkuvuus pisteessä  $x_0 \in M$  käyttämällä Lauseita 8.1 ja 11.2.

4. Olkoot  $(X, d_1)$  ja  $(Y, d_2)$  metrisiä avaruuksia, sekä  $f : X \rightarrow Y$  kuvaus. Oletetaan, että on olemassa kokoelma  $\{U_j\}_{j \in I}$  avoimia joukkoja  $X$ :ssä siten, että  $X = \cup_{j \in I} U_j$  ja että  $f$  on jatkuva jokaisessa joukossa  $U_j$ . Osoita, että  $f$  on jatkuva joukossa  $X$ .

5. Olkoon  $\{x_n\}$  jono metrisessä avaruudessa  $(M, d)$ , ja olkoon  $x_0 \in M$ . Oletetaan, että jonon  $\{x_n\}$  jokaisella osajonolla on edelleen osajono, joka suppenee kohti pistettä  $x_0$ . Osoita, että jono  $\{x_n\}$  itse suppenee kohti pistettä  $x_0$ , eli että  $x_n \rightarrow x_0$ .

*Opastus:* Tee vasta oletus, että  $x_n \not\rightarrow x_0$ . Kirjoita jonon raja-arvon määritelmää käyttäen auki, mitä  $x_n \not\rightarrow x_0$  tarkoittaa.

6. Osoita, että Cauchyn jonon osajono on edelleen Cauchyn jono.

*Huomautus:* Kyseistä tulosta sovellettiin sujuvasti Lauseen 12.10 todistuksessa.