Johdatus topologiaan
Kevät 2009
Harjoitus 7 (viikko 10)

1. Olkoon (M, d) täydellinen metrinen avaruus, ja olkoon $\{x_n\}$ jono joukon M pisteitä siten, että
$$d(x_n, x_m) \leq 10 \cdot 2^{-\min\{n,m\}}$$
kaikilla $n, m \in \mathbb{N}$. Osoita, että jono $\{x_n\}$ suppenee kohti jotakin pistettä $x_0 \in M$. (Tenttitehtävä, kevät 2008.)

2. Olkoot A ja B metrisen avaruuden M osajoukkoja. Oletetaan, että A ja B ovat täydellisiä (indusoidun metriikan suhteen). Osoita, että $A \cap B$ on myös täydellinen.

   Opastus: Lause 13.7.

3. Oletetaan, että metrisen avaruuden M jokainen suljettu pallo on täydellinen. Osoita, että M itse on täydellinen.

   Opastus: Lemman 12.8 nojalla jokainen Cauchyn jono voidaan sisällyttää johonkin suljettuun palloon.

4. Osoita, että funktio $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, on tasaisesti jatkuva
   (a) määritelmän avulla;
   (b) Esimerkin 14.4 avulla.

5. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $a \in M$. Määritellään kuvaus $f : M \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(x) = d(a, x)$. Osoita, että f on tasaisesti jatkuva.

   Opastus: Tasaisen jatkuvuuden määritelmä ja Lause 5.3.

6. Oletetaan, että $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ ovat joukon X topologioita. Osoita, että $\mathcal{T}_1 \cap \mathcal{T}_2$ on myös joukon X topologia.

   Huomautus: $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ ei välttämättä ole joukon X topologia. Tarkastelu sivuutetaan.