180305 Johdatus topologiaan (4 op)

Kevät 2009

1. Alkusanat

Sana ”topologia” on johdettu kreikan kielen sanoista ”topos” ja ”logos”, jotka merkitsevät paikkaa ja tietoa. Jo 1700-luvun alussa käytettiin latinan kielistä termiä ”analysis situs”, paikan analyysi, eräiden matemaattisten kysymysten yhteydessä, joiden voidaan katsoa ennakoineen nykypäivän topologiaa. Nimi topologia esiintyi ensimmäisen kerran 1800-luvun puolivälissä ja alkoi vakiintua käyttöön alan kehittyessä 1800-luvun loppupuolella.

Topologian tutkimuskohteena ovat sellaiset pistejoukkojen ominaisuudet, jotka säilyvät ns. topologisissa (jatkuvissa) muunnoksissa, eli homeomorfismeissa. Havainnollisen kuvan tällaisesta muunnoksesta saa tarkastelemalla muovailtavasta aineesta valmistetun esineen muodonmuutoksia. Esimerkiksi (umpinainen) pallo, lautanen, juomalasi ja haarukka ovat topologisesti ekvivalentteja (muunnettavissa toisikseen). Samoin ovat topologisesti ekvivalentteja esineet, joissa on yksi reikä, kuten sormus, pilli, kahvikuppi ja helminauhan helmi. Topologian kannalta ei siis ole tarpeen tehdä eroa niiden välillä. Sen sijaan edelliseen ryhmään kuuluva esine ei ole topologisesti ekvivalentti jälkimmäiseen kuuluvan kanssa.

Useimmille topologisille käsitteille on luonteenomaista se, että ne voidaan esittää käyttämättä reaalilukuja toisin kuin esim. analyysissä tai lineaarialgebrassa. Esimerkin topologisesta ominaisuudesta antaa maisema, jossa on järvi ja siinä saari. Tällöin saari on erillään mantereesta: saaresta ei pääse mantereelle kulkematta järven yli. Tämä on topologinen ominaisuus, joka on riippumaton järven ja saaren muodosta. Saaren etäisyys mantereesta sen sijaan ei ole topologinen vaan ns. metrinen käsite, koska saaren ja järven muoto vaikuttavat siihen. Kuitenkin etäisyyden suuruudesta riippumatta on aina olemassa sellaiset rannan kohdat saaressa ja mantereella, joiden välinen matka saaresta mantereelle on lyhin. Tämä olemassaolokysymys on puolestaan luonteeltaan topologinen.

Varsinaisen topologian voidaan katsoa alkaneen Bernhard Riemannista 1850-luvulta. Yleisen metrisen avaruuden määritteli Maurice Frechet vuonna 1906.

Tällä kurssilla tarkastellaan lähinnä etäisyysfunktiolla (eli metriikalla) varustettuja topologisia avaruuksia, eli metrisiä avaruuksia. Etäisyysfunktion läsnäolo tuo mukaan paljon analyysiin perustuvaa päättelyä, mm. jonojen suppeneminen ja funktion jatkuvuus, jotka ovat reaalilukujoukon ja itseisarvoon perustuvan etäisyysfunktion tapauksessa tuttuja Analyysi I -kurssilta.

Tämä moniste on Johdatus topologiaan -kurssin luentorunko. Teksti sisältää keskeiset kurssilla vastaantulevat määritelmät ja tulokset, mutta ei juuri lainkaan esimerkkejä tai todistuksia. Esimerkit ja ylipäätään varsinainen matemaattinen päättely esitetään luennoilla ja laskuharjoituksissa. Kurssilla vaadittavaa osaamista ei siis voi tavoittaa pelkästään lukemalla luentorunkoa.

Kirjallisuutena on käytetty mm. seuraavia oppikirjoja: *Apostol*, Mathematical Analysis, 1965; *Kaplansky*, Set Theory and Metric Spaces, 1977; *Rudin*, Principles of Mathematical Analysis, 1964; *Suominen-Vala*, Topologia, 1975.

2. Joukko-opin rooli topologiassa

Matemaattisessa analyysissä keskeisessä roolissa ovat epäyhtälöt. Topologia puolestaan käsittelee joukkojen ominaisuuksia, ja siksi epäyhtälön korvaa joukkoinkluusio. Jotta topologian käsitteisiin pääsisi ylipäätään kiinni, niin tulee siis ymmärtää ainakin joukko-opin peruskäsitteet "joukko" (engl. set) ja "alkio" (element, point), sekä niihin liittyvät perustulokset. Tällaisia ovat mm. $a \in A$ (alkio a kuuluu joukkoon A), A^c (joukon A komplementti, complement), $A \times B$ (joukkojen A ja B karteesinen tulo, Cartesian product), $A \subset B$ (joukko A on joukon B osajoukko, subset), $A \setminus B$ (joukkojen A ja B erotus, subtraction), $A \cup B$ (joukkojen A ja B yhdiste, union) ja $A \cap B$ (joukkojen A ja B leikkaus, intersection), sekä hieman yleisemmin esim. muotoa $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ olevat väitteet. Melko kattava katsaus joukko-opin perusteisiin löytyy mm. Johdantokurssin luentomonisteesta.

Johdantokurssilla joukkoinkluusioita tutkitaan äärellisen monen joukon tapauksessa mm. Venn-diagrammin avulla. Topologiassa joudutaan aika ajoin tarkastelemaan mm. joukkojen yhdisteitä ja leikkauksia yli mielivaltaisen indeksijoukon, joka voi olla jopa ylinumeroituva. Näiden tekninen käsittely tapahtuu jokseenkin samaan tapaan kuin äärellisen monen joukon tapauksessa, joskaan Venn-diagrammeista ei enää ole sanottavaa apua.

Joukkoa sanotaan numeroituvasti äärettömäksi (countably infinite), jos kyseisen joukon ja luonnollisten lukujen joukon $\mathbb{N}$ välille voidaan muodostaa bijektio. Joukko on puolestaan numeroituva (countable), jos se on joko äärellinen tai numeroituvasti ääretön. Muussa tapauksessa joukko on ylinumeroituva (uncountable). Cantorin diagrammiin perustuen voidaan osoittaa, että esimerkiksi rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q}$ on numeroituva. Vastaavasti reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on ylinumeroituva.

Olkoot A_j, $j \in \mathbb{N}$, vaikkapa reaalilukujoukon $\mathbb{R}$ osajoukkoja. Tällöin merkintä $x \in \cup_{j=1}^{\infty} A_j$ tarkoittaa, että x kuuluu joukkojen A_j yhdisteeseen, ts. on olemassa ainakin yksi indeksi $j_0 \in \mathbb{N}$ siten, että $x \in A_{j_0}$. Merkintä $x \in \cap_{j=1}^{\infty} A_j$ puolestaan tarkoittaa, että x kuuluu joukkojen A_j leikkaukseen, ts. $x \in A_j$ kaikilla $j \in \mathbb{N}$.

Olkoon seuraavaksi I mielivaltainen indeksijoukko (ylinumeroituvakin käy), sekä olkoot A_j, $j \in I$, mielivaltaisia pistejoukkoja. Tällöin merkintä $x \in \cup_{j \in I} A_j$ tarkoittaa, että x kuuluu joukkojen A_j yhdisteeseen, ts. on olemassa ainakin yksi indeksi $j_0 \in I$ siten, että $x \in A_{j_0}$. Merkintä $x \in \cap_{j \in I} A_j$ puolestaan tarkoittaa, että x kuuluu joukkojen A_j leikkaukseen, ts. $x \in A_j$ kaikilla $j \in I$.

Esimerkki 2.1. Olkoon M joukko, ja olkoon $\{A_j\}_{j \in I}$ kokoelma sen osajoukkoja, missä I on mielivaltainen indeksijoukko. Osoita, että

$$M \setminus \cup_{j \in I} A_j = \cap_{j \in I} (M \setminus A_j) .$$

3. Vektoriavaruus $\mathbb{R}^n$

n-ulotteinen Euklidinen avaruus $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, on karteesisen tulon avulla määritelty joukko

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n \text{ kpl}} = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

Joukon $\mathbb{R}^n$ alkioita $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sanotaan vektoreiksi tai pisteiksi. Lukuja x_j, $j = 1, \dots, n$, kutsutaan vektorin $\overline{x}$ komponenteiksi tai pisteen $\overline{x}$ koordinaateiksi. Alkiota $\overline{0} = (0, 0, \dots, 0)$ sanotaan nollavektoriksi tai origoksi. Vektorin $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ vastavektori on vektori $-\overline{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Jos $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\overline{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda \in \mathbb{R}$, niin yhteenlasku ja reaaliluvulla kertominen määritellään kaavoilla

$$\begin{aligned} \overline{x} + \overline{y} &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n), \\ \lambda\overline{x} &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n). \end{aligned}$$

Vektoreiden $\overline{x}$ ja $\overline{y}$ erotus määritellään vastavektorin ja yhteenlaskun avulla seuraavasti:

$$\overline{x} - \overline{y} = \overline{x} + (-\overline{y}) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n).$$

Lause 3.1. *Jos $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, niin*

(a) $(\overline{x} + \overline{y}) + \overline{z} = \overline{x} + (\overline{y} + \overline{z})$;

(b) $\overline{x} + \overline{0} = \overline{x}$;

(c) $\overline{x} + (-\overline{x}) = \overline{0}$;

(d) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{y} + \overline{x}$;

(e) $1\overline{x} = \overline{x}$;

(f) $(\lambda\mu)\overline{x} = \lambda(\mu\overline{x})$;

(g) $\lambda(\overline{x} + \overline{y}) = \lambda\overline{x} + \lambda\overline{y}$;

(h) $(\lambda + \mu)\overline{x} = \lambda\overline{x} + \mu\overline{x}$.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ kantavektoreiksi (base vectors) kutsutaan vektoreita

$$\overline{e_1} = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \overline{e_2} = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \overline{e_n} = (0, 0, \dots, 0, 1).$$

Kantavektoreiden avulla vektorille $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ saadaan esitys

$$\begin{aligned} \overline{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= (x_1, 0, 0, \dots, 0) + (0, x_2, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, 0, \dots, 0, x_n) \\ &= x_1(1, 0, 0, \dots, 0) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0) + \cdots + x_n(0, 0, \dots, 0, 1) \\ &= x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \cdots + x_n\overline{e_n} = \sum_{j=1}^{n} x_j\overline{e_j}. \end{aligned}$$

Jos $n = 2$, niin yleensä merkitään

$$\overline{e_1} = (1,0) = \overline{i} \quad \text{ja} \quad \overline{e_2} = (0,1) = \overline{j}.$$

Jos $n = 3$, niin merkitään

$$\overline{e_1} = (1,0,0) = \overline{i}, \quad \overline{e_2} = (0,1,0) = \overline{j} \quad \text{ja} \quad \overline{e_3} = (0,0,1) = \overline{k}.$$

Siis

$$\begin{aligned} \overline{x} &= (x_1, x_2) = x_1\overline{i} + x_2\overline{j}, \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^2, \\ \overline{x} &= (x_1, x_2, x_3) = x_1\overline{i} + x_2\overline{j} + x_3\overline{k}, \quad \overline{x} \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Vektoreiden $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $\overline{y} \in \mathbb{R}^n$ sisätulo (inner product) eli skalaaritulo (scalar product) määritellään kaavalla

$$\overline{x} \cdot \overline{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \sum_{j=1}^{n} x_jy_j.$$

Jos $\overline{x} \cdot \overline{y} = 0$, niin vektoreiden $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$ sanotaan olevan kohtisuorassa (orthogonal) toisiaan vastaan.

Lause 3.2. *Jos $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$ ja $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, niin*

(a) $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$*;*

(b) $\overline{x} \cdot (\lambda\overline{y} + \mu\overline{z}) = \lambda(\overline{x} \cdot \overline{y}) + \mu(\overline{x} \cdot \overline{z})$*;*

(c) $\overline{x} \cdot \overline{x} \geq 0$ *ja* $\overline{x} \cdot \overline{x} = 0 \iff \overline{x} = \overline{0}$.

Vektorin $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ normi eli pituus (etäisyys origosta) määritellään kaavalla

$$||\overline{x}|| = \sqrt{\overline{x} \cdot \overline{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Normilla on mm. ominaisuudet

(a) $||\overline{x}|| \geq 0$ ja $||\overline{x}|| = 0 \iff \overline{x} = \overline{0}$;

(b) $||\lambda\overline{x}|| = |\lambda|||\overline{x}||$.

Schwarzin epäyhtälö. Jos $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$, niin

$$|\overline{x} \cdot \overline{y}| \leq ||\overline{x}||||\overline{y}||.$$

Kolmioepäyhtälöt. Jos $\overline{x}, \overline{y} \in \mathbb{R}^n$, niin

$$|||\overline{x}|| - ||\overline{y}||| \leq ||\overline{x} + \overline{y}|| \leq ||\overline{x}|| + ||\overline{y}||.$$

4. Metrisiä ja topologisia peruskäsitteitä avaruudessa $\mathbb{R}^n$

Pisteiden välinen etäisyys ja siten mm. jonojen suppeneminen ovat metrisiä ominaisuuksia. Toisaalta esim. sisäpisteen käsite (tark. myöh.) on luonteeltaan topologinen, sillä ominaisuus ”x on joukon A sisäpiste” ei muutu avaruuden jatkuvissa muunnoksissa.

Huomaa, että $\mathbb{R}^n$ on vektoriavaruus, jota yleinen metrinen avaruus (tark. myöh.) ei ole. Tästä johtuen osalla avaruuden $\mathbb{R}^n$ käsitteistä ei ole vastinetta yleisessä metrisessä avaruudessa (esim. alkioiden väliset laskutoimitukset).

Pisteiden $x \in \mathbb{R}$ ja $y \in \mathbb{R}$ välinen Euklidinen etäisyys (Euclidean distance) on $|x-y|$, joka voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$|x-y| = \sqrt{(x-y)^2}.$$

Myöhemmin määrittelemme muitakin joukon $\mathbb{R}$ etäisyysfunktioita.

Pisteiden $\overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ja $\overline{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ välinen Euklidinen etäisyys määritellään kaavalla

$$||\overline{x}-\overline{y}|| = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2}. \tag{4.1}$$

Luvun 3 nojalla voimme listata seuraavat joukon $\mathbb{R}^n$ etäisyysfunktion ominaisuudet.

Lause 4.1. *Jos $\overline{x}, \overline{y}, \overline{z} \in \mathbb{R}^n$, niin*

(R1) $||\overline{x}-\overline{x}|| = 0$;

(R2) $||\overline{x}-\overline{y}|| > 0$, *kun* $\overline{x} \neq \overline{y}$;

(R3) $||\overline{x}-\overline{y}|| = ||\overline{y}-\overline{x}||$;

(R4) $||\overline{x}-\overline{z}|| \leq ||\overline{x}-\overline{y}|| + ||\overline{y}-\overline{z}||$ *(kolmioepäyhtälö, triangle inequality).*

Määritelmä 4.2. Jono $\{x_k\}$ reaalilukuja suppenee kohti pistettä $x \in \mathbb{R}$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että $|x_k - x| < \varepsilon$ kaikilla $k \geq N(\varepsilon)$. Tällöin merkitään

$$x = \lim_{k\to\infty} x_k.$$

Määritelmä 4.3. Jono $\{\overline{x}_k\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteitä suppenee kohti pistettä $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että $||\overline{x}_k - \overline{x}|| < \varepsilon$ kaikilla $k \geq N(\varepsilon)$. Tällöin merkitään

$$\overline{x} = \lim_{k\to\infty} \overline{x}_k.$$

Huomaa, että raja-arvoon liittyvä merkintä ”lim” riippuu aina käytössä olevasta etäisyysfunktiosta. Lukiomatematiikassa ja Analyysi I -kurssilla tarkastellaan reaalilukuja, joten merkintä ”lim” liittyi aina itseisarvoon perustuvaan etäisyysfunktioon.

Lause 4.4. *Olkoon* $\overline{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk})$, $k \in \mathbb{N}$, *ja* $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. *Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

(a) $\overline{x} = \lim_{k\to\infty} \overline{x}_k$;

(b) $\lim_{k\to\infty} ||\overline{x}_k - \overline{x}|| = 0$;

(c) $x_j = \lim_{k\to\infty} x_{jk}$ *kaikilla* $j = 1, 2, \dots, n$.

Reaalilukujonojen raja-arvokaavojen ja Lauseen 4.4 nojalla saadaan seuraava avaruuden $\mathbb{R}^n$ jonoja koskeva perustulos, jolle ei ole vastinetta yleisessä metrisessä avaruudessa.

Lause 4.5. *Jos* $\lim_{k\to\infty} \overline{x}_k = \overline{x}$, $\lim_{k\to\infty} \overline{y}_k = \overline{y}$ *ja* $\{\lambda_k\}$ *on jono reaalilukuja siten, että* $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda$, *niin*

(a) $\lim_{k\to\infty} (\overline{x}_k + \overline{y}_k) = \overline{x} + \overline{y}$;

(b) $\lim_{k\to\infty} (\lambda_k \overline{x}_k) = \lambda \overline{x}$;

(c) $\lim_{k\to\infty} (\overline{x}_k \cdot \overline{y}_k) = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

Määritelmä 4.6. Olkoot $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ ja $r > 0$. Joukon $\mathbb{R}^n$ osajoukkoa

$$B(\overline{x}, r) = \{\overline{y} \in \mathbb{R}^n : ||\overline{x} - \overline{y}|| < r\}$$

kutsutaan $\overline{x}$-keskiseksi ja r-säteiseksi avoimeksi palloksi (open ball). Osajoukkoa

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in M : ||\overline{x} - \overline{y}|| \leq r\}$$

kutsutaan $\overline{x}$-keskiseksi ja r-säteiseksi suljetuksi palloksi (closed ball).

Tapauksessa $n = 1$ saadaan $B(x, r) =]x - r, x + r[$ ja $\overline{B}(x, r) = [x - r, x + r]$, eli joukon $\mathbb{R}$ avoimet pallot ovat avoimia välejä ja suljetut pallot vastaavasti suljettuja välejä. Samaan tapaan joukon $\mathbb{R}^2$ pallot ovat geometrisessa mielessä kiekkoja.

Määritelmä 4.7. Joukkoa $A \subset \mathbb{R}^n$ kutsutaan avoimeksi (open), jos jokaista $\overline{x} \in A$ vastaa $r > 0$ siten, että $B(\overline{x}, r) \subset A$.

Joukko $\mathbb{R}^n$ itse sekä tyhjä joukko $\emptyset$ ovat molemmat avoimia.

Lause 4.8. *Avaruuden* $\mathbb{R}^n$ *avoimet pallot ovat avoimia joukkoja.*

Esimerkki 4.9. Puolitaso $H = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 > 0\}$ on avoin avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Määritelmä 4.10. Joukko $F \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu (closed), jos sen komplementti $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ on avoin joukko.

Esimerkki 4.11. Yleensä joukot eivät ole avoimia eivätkä suljettuja. Esimerkiksi joukko $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x_1 \le 1,\ 0 < x_2 < 1\}$ ei ole avoin eikä suljettu avaruudessa $\mathbb{R}^2$.

Avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoimien joukkojen mielivaltaiset yhdisteet ja äärelliset leikkaukset ovat avoimia. Edelleen suljettujen joukkojen mielivaltaiset leikkaukset ja äärelliset yhdisteet ovat suljettuja. Nämä väitteet seuraavat erikoistapauksina yleisten metristen avaruuksien vastaavista tuloksista, ks. Luvut 6 ja 7.

Määritelmä 4.12. Piste $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ kasaantumispiste (accumulation point), jos pisteen $\overline{x}$ jokainen palloympäristö $B(\overline{x}, r)$ sisältää ainakin yhden pisteen $\overline{y} \in A$ siten, että $\overline{y} \neq \overline{x}$.

Esimerkki 4.13. Piste $(0, 0)$ on joukon $A = \{(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ kasaantumispiste.

Lause 4.14. *Oletetaan, että $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ on joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ kasaantumispiste. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

(a) $\overline{x}$ on joukon A kasaantumispiste;

(b) Jokainen pallo $B(\overline{x}, r)$ sisältää äärettömän monta joukon A pistettä;

(c) On olemassa jono $\{\overline{x}_k\}$ joukon A pisteitä siten, että $\overline{x} = \lim_{k\to\infty} \overline{x}_k$.

Määritelmä 4.15. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ sulkeuma on joukko

$$\overline{A} = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \overline{x} \in A \text{ tai } \overline{x} \text{ on joukon } A \text{ kasaantumispiste}\}.$$

Lause 4.16. *Joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu, jos ja vain jos se sisältää kaikki kasaantumispisteensä. Toisin sanoen, joukko $A \subset \mathbb{R}^n$ on suljettu, jos ja vain jos $A = \overline{A}$.*

Todistus. Oletetaan, että A on suljettu. Tehdään vastaoletus, että $A \neq \overline{A}$. Tällöin joukolla A on kasaantumispiste $\overline{x}$ siten, että $\overline{x} \notin A$, jolloin $\overline{x} \in A^c$. Koska $\overline{x}$ on joukon A kasaantumispiste, niin Lauseen 4.14 nojalla jokainen pallo $B(\overline{x}, r)$ sisältää äärettömän monta joukon A pistettä. Tästä seuraa, että ei ole olemassa lukua $r > 0$ siten, että $B(\overline{x}, r) \subset A^c$. Siis A^c ei ole avoin, eli A ei ole suljettu, mikä on ristiriita. Siis $A = \overline{A}$. Väitteen käänteinen suunta osoitetaan luennolla. □

Esimerkki 4.17. Joukko $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ on suljettu. Tämän osoittamiseksi olkoon $\overline{x} = (x_1, x_2)$ mielivaltainen joukon A kasaantumispiste. Lauseen 4.14 nojalla on olemassa jono $\{\overline{x}_k\}$, $\overline{x}_k = (x_{1k}, x_{2k})$, joukon A pisteitä siten, että $\overline{x} = \lim_{k\to\infty} \overline{x}_k$. Lauseen 4.4 nojalla edelleen

$$x_1 = \lim_{k\to\infty} x_{1k} \quad \text{ja} \quad x_2 = \lim_{k\to\infty} x_{2k}.$$

Koska $(x_{1k}, x_{2k}) \in A$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$, niin $x_{1k}^2 + x_{2k}^2 = 1$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$. Tästä seuraa, että

$$x_1^2 + x_2^2 = \lim_{k\to\infty} \left(x_{1k}^2 + x_{2k}^2\right) = 1,$$

eli $\overline{x} \in A$. Koska $\overline{x}$ valittiin mielivaltaisesti, niin A sisältää kaikki kasaantumispisteensä. Täten A on Lauseen 4.16 mukaan suljettu.

Määritelmä 4.18. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$.

(a) Piste $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ on joukon A sisäpiste (interior point), jos on olemassa $r > 0$ siten, että $B(\overline{x}, r) \subset A$. Joukon A sisäpisteiden joukkoa merkitään $\mathrm{Int}\,(A)$.

(b) Piste $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ on joukon A ulkopiste (exterior point), jos on olemassa $r > 0$ siten, että $B(\overline{x}, r) \subset A^c$. Joukon A ulkopisteiden joukkoa merkitään $\mathrm{Ext}\,(A)$.

(c) Piste $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ on joukon A reunapiste (boundary point), jos jokainen pallo $B(\overline{x}, r)$ sisältää sekä joukon A että sen komplementin A^c pisteitä. Joukon A reunapisteiden joukkoa merkitään $\mathrm{Bd}\,(A)$.

Edellisen määritelmän nojalla nähdään, että jos $\overline{x} \notin A$, niin $\overline{x}$ on joukon A reunapiste, jos ja vain jos $\overline{x}$ on joukon A kasaantumispiste. Näin ollen

$$\overline{A} = A \cup \mathrm{Bd}\,(A). \tag{4.2}$$

Edelleen A on suljettu, jos ja vain jos A sisältää kaikki reunapisteensä, vrt. Lause 4.16.

Määritelmä 4.19. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ halkaisija (diameter) on luku

$$\mathrm{diam}\,(A) = \sup_{\overline{x}, \overline{y} \in A} ||\overline{x} - \overline{y}||.$$

Joukko A on rajoitettu (bounded), jos $\mathrm{diam}\,(A) < \infty$. Edelleen A on kompakti (compact), jos se on suljettu ja rajoitettu.

Esimerkki 4.20. Avaruuden $\mathbb{R}^n$ avoin pallo $B(\overline{x}, r)$ on rajoitettu, sillä $\mathrm{diam}\,(B(\overline{x}, r)) = 2r$ (tod. luennolla). Avoin pallo ei kuitenkaan ole suljettu, joten se ei ole kompakti. Edelleen suljettu pallo on suljettu ja rajoitettu (tod. myöhemmin) ja siten kompakti.

5. Metrinen avaruus

Kehitettäessä topologiaa etäisyyden käsitteen pohjalta ei toimivan teorian aikaansaamiseksi tarvitse vaatia muuta kuin eräitä (itsestäänselviä) perusominaisuuksia.

Määritelmä 5.1. Joukon M metriikka (metric) on kuvaus $d : M \times M \to \mathbb{R}$, joka toteuttaa seuraavat ehdot:

(M1) $d(x, x) = 0$,

(M2) $d(x, y) > 0$, $x \neq y$,

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$,

kun $x, y, z \in M$. Paria (M, d) kutsutaan metriseksi avaruudeksi (metric space). Joukon M alkoita kutsutaan puolestaan pisteiksi.

Esimerkki 5.2. (a) Kuvaus $d(x, y) = |x - y|$ on metriikka reaalilukujen joukossa $\mathbb{R}$. Yleisemmin normin $||\cdot||$ määräämä etäisyysfunktio $d(x, y) = ||x-y||$ on metriikka joukossa $\mathbb{R}^n$, ks. Lause 4.1.

(b) Olkoon M Suomen rautatieliikennepaikkojen muodostama joukko ja $d(x, y)$ etäisyys kilometreina x:stä y:hyn rautateitse, kun $x, y \in M$. Tällöin d on metriikka joukossa M. Huomaa, että koko maailman rautatieliikennepaikkojen joukossa ei vastaavalla tavalla voida määritellä metriikkaa. (Miksi?)

(c) Olkoon M mikä tahansa pistejoukko. Määritellään kuvaus $d : M \times M \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ kun } x \neq y, \\ 0, \text{ kun } x = y. \end{cases}$$

Osoitetaan, että d on metriikka joukossa M. Ehdot (M1)–(M3) seuraavat suoraan kuvauksen d määritelmästä. Olkoot $x, y, z \in M$. Jos $x = z$, niin $d(x, z) = 0$ ja kolmioepäyhtälö (M4) on selvä. Jos taas $x \neq z$, niin joko $x \neq y$ tai $y \neq z$, jolloin kolmioepäyhtälön (M4) oikea puoli on vähintään 1. Kuvausta d sanotaan diskreetiksi metriikaksi (discrete metric).

Lause 5.3. *Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Tällöin kaikilla $x, y, z \in M$ on voimassa*

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y). \tag{5.1}$$

Todistus. Oletetaan ensin, että $d(x, z) - d(y, z) \geq 0$. Tällöin itseisarvot väitteessä (5.1) häviävät, jolloin (5.1) on ekvivalentti kolmiopäyhtälön (M4) kanssa. Oletetaan seuraavaksi, että $d(x, z) - d(y, z) < 0$. Tällöin väite (5.1) on muotoa $d(y, z) \leq d(x, y) + d(x, z)$, jonka on oltava voimassa kolmioepäyhtälön (M4) nojalla. $\square$

Esimerkki 5.4. Olkoon M joukko, ja olkoon $d : M \times M \to \mathbb{R}$ kuvaus, joka toteuttaa ominaisuudet (M1)–(M3). Oletetaan, että $d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z)$ kaikilla $x, y, z \in M$. Osoita, että joukossa M on korkeintaan yksi piste.

Olkoon M joukko ja A sen osajoukko. Jos d on metriikka joukossa M, niin metriikalta vaadittavat ehdot (M1)–(M4) ovat voimassa, kun rajoitutaan tarkastelemaan pisteitä $x, y, z \in A$. Siis kuvauksen d rajoittuma joukon $M \times M$ osajoukkoon $A \times A$ on metriikka joukossa A. Tätä rajoittumaa kutsutaan metriikan d indusoimaksi metriikaksi joukossa A.

Määritelmä 5.5. Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Joukon $A \subset M$ halkaisija (diameter) on luku

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Esimerkki 5.6. Olkoon (A, d) metrinen avaruus siten, että $A = B \cup C$. Oletetaan, että $\operatorname{diam}(B) < \infty$ ja $\operatorname{diam}(C) < \infty$. Tällöin $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Jatkossa tarkastellaan useita ominaisuuksia jotka metristen avaruuksien välisellä kuvauksella joko on tai ei ole. Seuraavassa eräs yksinkertaisimmista tällaisista ominaisuuksista.

Määritelmä 5.7. Olkoot (M_1, d_1) ja (M_2, d_2) metrisiä avaruuksia. Kuvausta

$$f : M_1 \to M_2$$

sanotaan isometriaksi (isometry), jos $d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y)$ kaikilla $x, y \in M_1$.

Isometriaa kutsutaan myös etäisyyden säilyttäväksi kuvaukseksi.

Tarkasteltaessa kahta tai useampaa metristä avaruutta yhtä aikaa käytetään usein samaa symbolia d kussakin metrisessä avaruudessa, mikäli sekaannuksen vaaraa ei ole.

6. Avoin joukko

Määritelmä 6.1. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoot $x \in M$ ja $r > 0$. Joukon M osajoukkoa

$$B(x, r) = \{y \in M : d(x, y) < r\} \qquad (= B_d(x, r))$$

kutsutaan x-keskiseksi ja r-säteiseksi avoimeksi palloksi (open ball). Osajoukkoa

$$\overline{B}(x, r) = \{y \in M : d(x, y) \leq r\} \qquad (= \overline{B_d}(x, r))$$

kutsutaan x-keskiseksi ja r-säteiseksi suljetuksi palloksi (closed ball).

Määritelmä 6.2. Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Joukkoa $A \subset M$ kutsutaan avoimeksi (open), jos jokaista $x \in A$ vastaa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subset A$.

Joukko M itse sekä tyhjä joukko $\emptyset$ ovat molemmat avoimia.

Lause 6.3. *Metrisen avaruuden avoin pallo on avoin joukko.*

Lause 6.4. *Metrisen avaruuden avointen joukkojen mielivaltaiset yhdisteet ja äärelliset leikkaukset ovat avoimia joukkoja.*

Todistus. Olkoon $\{A_j\}_{j \in I}$ mielivaltainen kokoelma avoimia joukkoja. Osoitetaan, että joukko

$$A = \cup_{j \in I} A_j$$

on avoin. Olkoon $x \in A$. Tällöin on olemassa $j_0 \in I$ siten, että $x \in A_{j_0}$. Koska A_{j_0} on avoin, niin on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subset A_{j_0} \subset A$, eli joukko A on avoin.

Olkoon $B_1, \ldots, B_n$ äärellinen kokoelma avoimia joukkoja. Osoitetaan, että joukko

$$B = \cap_{j=1}^{n} B_j$$

on avoin. Olkoon $x \in B$. Tällöin $x \in B_j$ kaikilla $j = 1, \ldots, n$. Koska kukin joukko B_j on avoin, niin jokaiselle $j = 1, \ldots, n$ on olemassa $r_j > 0$ siten, että $B(x, r_j) \subset B_j$. Valitaan $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$. Nyt $B(x, r) \subset B_j$ kaikilla $j = 1, \ldots, n$, eli $B(x, r) \subset B$. Täten joukko B on avoin. $\square$

Lause 6.5. *Metrisen avaruuden osajoukko A on avoin joukko, jos ja vain jos A voidaan esittää avointen pallojen yhdisteenä.*

Todistus. Oletetaan, että A on avoin. Tällöin jokaista $x \in A$ vastaa x-keskinen avoin pallo, joka kuuluu joukkoon A. Edelleen joukko A voidaan esittää tällaisten pallojen yhdisteenä.

Kääntäen oletetaan, että A voidaan esittää avoimien pallojen yhdisteenä. Lauseen 6.3 nojalla jokainen avoin pallo on avoin joukko, joten Lauseen 6.4 nojalla A on avoin. □

Määritelmä 6.6. Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Pisteen $x \in M$ ympäristö (neighborhood) on joukko $V \subset M$ siten, että $B(x, r) \subset V$ jollekin $r > 0$.

Pisteen x ympäristöjä ovat siten esim. x-keskiset avoimet ja suljetut pallot.

Lause 6.7. *Metrisen avaruuden osajoukko A on avoin, jos ja vain jos jokaisella pisteellä $x \in A$ on ympäristö V siten, että $x \in V \subset A$.*

Todistus. Oletetaan, että A on avoin. Tällöin jokaista $x \in A$ vastaa $r_x > 0$ siten, että $B(x, r_x) \subset A$. Vaadituksi ympäristöksi voidaan siis valita $V = B(x, r_x)$.

Oletetaan kääntäen, että jokaisella pisteellä $x \in A$ on ympäristö V_x siten, että $x \in V_x \subset A$. Ympäristön määritelmän nojalla on olemassa $r_x > 0$ siten, että $B(x, r_x) \subset V_x \subset A$, joten A on avoin. □

Määritelmä 6.8. Metrisen avaruuden piste x on erillinen (isolated), jos on olemassa sellainen $r > 0$, että $B(x, r) = \{x\}$. Metrinen avaruus on diskreetti (discrete), jos sen jokainen piste on erillinen.

Toisin sanoen, metrinen avaruus on diskreetti, jos ja vain jos sen jokainen piste on erillinen.

Esimerkki 6.9. Olkoon M joukko, ja olkoon d sen diskreetti metriikka. (Tällöin siis $d(x, x) = 0$ ja $d(x, y) = 1$, kun $x \neq y$.) Osoitetaan, että (M, d) on diskreetti. Olkoon $x \in M$. Tällöin $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\}$, joten x on erillinen piste. Koska x oli mielivaltainen, niin (M, d) on diskreetti.

Esimerkki 6.10. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $A \subset M$ avoin ja äärellinen osajoukko. Osoita, että joukon A jokainen piste on erillinen joukossa M.

Lause 6.11. *Olkoon (M, d) metrinen avaruus ja $x \in M$. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

(a) *Piste x ei ole erillinen;*

(b) *Pisteen x jokaisessa ympäristössä on äärettömän monta joukon M pistettä.*

Todistus. Oletetaan, että väite (a) on voimassa. Tehdään vastaoletus, että on olemassa pisteen x ympäristö U, jossa on vain äärellisen monta joukon M pistettä. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subset U$ ja että pallo $B(x, r)$ sisältää vain äärellisen monta joukon M pistettä $a_1, \ldots, a_n$. Määritellään $s = \min_{1 \leq j \leq n}\{d(x, a_j)\}$. Tällöin $B(x, s) = \{x\}$, eli x on erillinen piste. Mutta tämä on ristiriita, joten väite (b) on voimassa.

Oletetaan kääntäen, että väite (b) on voimassa. Tehdään vastaoletus, että x on erillinen. Tällöin on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) = \{x\}$, joka on ristiriita. Siis väite (a) on voimassa. $\square$

7. Jonon raja-arvo ja suljettu joukko

Määritelmä 7.1. Olkoon $\{x_n\}$ jono metrisessä avaruudessa (M, d). Jonon $\{x_n\}$ sanotaan suppenevan kohti (converge to) pistettä $x \in M$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x, x_n) < \varepsilon$ kaikilla $n \geq N(\varepsilon)$. Pistettä x kutsutaan tällöin jonon $\{x_n\}$ raja-arvoksi (limit).

Jonon suppenemista merkitään tavalliseen tapaan kirjoittamalla

$$x_n \to x \quad \text{tai} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Kummassakin merkinnässä on syytä olla tarkkana, minkä metriikan suhteen suppeneminen tapahtuu. Aivan kuten reaalilukujonojenkin tapauksessa, metrisen avaruuden jonon pisteiden ei tarvitse olla erillisiä, eikä niiden tarvitse poiketa raja-arvosta x.

Huomautus. Jonon raja-arvo on yksikäsitteinen. Tämä tarkoittaa seuraavaa: Jos (M, d) on metrinen avaruus, ja jos $\{x_n\}$ on jono joukon M pisteitä, joka suppenee kohti pisteitä $x \in M$ ja $y \in M$, niin tällöin $x = y$.

Lause 7.2. *Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Olkoon $A \subset M$ ja $x \in M$. Tällöin on olemassa jono joukon A pisteitä, joka suppenee kohti pistettä x, jos ja vain jos leikkaus $B(x, r) \cap A$ on epätyhjä kaikilla $r > 0$.*

Luvussa 4 avaruuden $\mathbb{R}^n$ osajoukkoa kutsuttiin suljetuksi, mikäli sen komplementti on avoin. Kirjallisuudessa yleisen metrisen avaruuden suljettu joukko määritellään tavallisesti jonojen suppenemisen avulla. Lauseessa 7.4 tullaan osoittamaan, että nämä lähestymistavat ovat ekvivalentteja, ts. kumpi hyvänsä voidaan ottaa määritelmäksi.

Määritelmä 7.3. Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Joukkoa $F \subset M$ sanotaan suljetuksi, jos F sisältää kaikkien suppenevien jonojensa rajapisteet.

Matemaattisesti ilmaisten: Joukko $F \subset M$ on suljettu, jos jokaiselle joukon F pistettä $x \in M$ kohti suppenevalle jonolle pätee $x \in F$.

Joukko M itse sekä tyhjä joukko $\emptyset$ ovat molemmat suljettuja. Itse asiassa M ja $\emptyset$ ovat sekä suljettuja että avoimia. On mahdollista, että joku muukin joukko $A \subset M$, $A \neq \emptyset, M$, on sekä suljettu että avoin, mutta tämä riippuu joukosta M. Mikäli tällaisia joukkoja ei ole, niin joukkoa M sanotaan yhtenäiseksi. Esimerkiksi reaalilukujoukko $\mathbb{R}$ on yhtenäinen.

Lause 7.4. *Metrisen avaruuden osajoukko on suljettu, jos ja vain jos sen komplementti on avoin.*

Todistus. Olkoon (M, d) tarkasteltava metrinen avaruus. Olkoon $F \subset M$ suljettu. Osoitetaan, että $U = M \setminus F$ on avoin joukko. Jos $U = \emptyset$, niin väite on todistettu. Oletetaan, että $U \neq \emptyset$. Olkoon $x \in U$. Riittää osoittaa, että on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x, r) \subset U$. Tehdään vastaoletus, että tällaista lukua r ei ole olemassa. Tällöin $B(x, r) \cap F \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$. Lauseen 7.2 nojalla on olemassa jono $\{x_n\}$ joukon F pisteitä, joka suppenee kohti pistettä x. Koska F on suljettu, niin $x \in F$. Tämä on ristiriita, sillä aiemmin todettiin, että $x \in M \setminus F$. Väitteen käänteinen suunta osoitetaan luennolla. □

Esimerkki 7.5. Olkoon (M, d) metrinen avaruus ja $x \in M$. Osoita, että $\{x\}$ on suljettu.

Todistus. Väitteen voi todistaa ainakin kahdella eri tavalla. Luvun 6 luentoesimerkin nojalla $M \setminus \{x\}$ on avoin joukko, joten Lauseen 7.4 mukaan $\{x\}$ on suljettu.

Osoitetaan esimerkin väite suoraan määritelmän avulla. Olkoon $\{y_n\}$ jono joukon $\{x\}$ pisteitä siten, että $y_n \to y \in M$. Koska joukossa $\{x\}$ ei ole muita pisteitä kuin x, niin on oltava $y_n = x$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Mutta vakiojonon raja-arvo on kyseinen vakio, sillä $d(x, y_n) = d(x, x) = 0 < \varepsilon$ kaikilla $\varepsilon > 0$. Siis $y = x \in \{x\}$. □

Seuraava tulos on suljettujen joukkojen vastine Lauseelle 6.4.

Lause 7.6. *Metrisen avaruuden suljettujen joukkojen mielivaltaiset leikkaukset ja äärelliset yhdisteet ovat suljettuja joukkoja.*

Todistus. Olkoon $\{A_j\}_{j \in I}$ mielivaltainen kokoelma metrisen avaruuden (M, d) suljettuja joukkoja. Tällöin Lauseen 7.4 mukaan joukot $M \setminus A_j$ ovat avoimia kaikilla $j \in I$. Lauseen 6.4 nojalla yhdiste

$$\cup_{j \in I} (M \setminus A_j) = M \setminus (\cap_{j \in I} A_j)$$

on avoin, ja edelleen Lauseen 7.4 mukaan joukko $\cap_{j \in I} A_j$ on suljettu. Äärellisen yhdisteen tapaus todistetaan vastaavaan tapaan. □

Huomautus. Osoitetaan Lauseen 7.6 mielivaltaisen leikkauksen tapaus vielä käyttämällä suljetun joukon määritelmää. Olkoon $\{A_j\}_{j \in I}$ mielivaltainen kokoelma suljettuja joukkoja. Olkoon $\{x_n\}$ jono joukon $\cap_{j \in I} A_j$ pisteitä siten, että $x_n \to x \in M$. Riittää osoittaa, että $x \in \cap_{j \in I} A_j$. Leikkauksen määritelmän nojalla jonon $\{x_n\}$ pisteet kuuluvat jokaiseen joukkoon A_j, $j \in I$. Koska jokainen A_j, $j \in I$, on suljettu, ja koska jonon raja-arvo on yksikäsitteinen, niin jonon $\{x_n\}$ raja-arvo x kuuluu jokaiseen joukkoon A_j, $j \in I$, eli $x \in \cap_{j \in I} A_j$.

Olkoon (M, d) metrinen avaruus ja (A, d_A) sen aliavaruus, missä d_A on metriikan d indusoima metriikka joukkoon $A \times A$. Seuraavassa tutkitaan joukon A avoimien ja suljettujen joukkojen suhdetta joukon M avoimiin ja suljettuihin joukkoihin. Jos $x \in A$ ja $r > 0$, niin x-keskinen ja r-säteinen avoin pallo joukossa A on

$$\begin{aligned} B_{d_A}(x,r) &= \{y \in A : d_A(x,y) < r\} \\ &= \{y \in M : d(x,y) < r \text{ ja } y \in A\} \\ &= B(x,r) \cap A. \end{aligned}$$

Siis aliavaruuden A pallot ovat vastaavien joukon M pallojen ja joukon A leikkauksia. Yleisemmin osoittautuu, että jokainen joukon A avoin joukko (vast. suljettu joukko) voidaan saada samalla tavoin jostakin joukon M avoimesta joukosta (vast. suljetusta joukosta).

Lause 7.7. *Olkoon (M,d) metrinen avaruus, ja olkoon $A \subset M$, $A \neq \emptyset$.*

(a) *Joukko $U \subset A$ on avoin A:ssa jos ja vain jos on olemassa sellainen M:n avoin joukko V, että $U = V \cap A$.*

(b) *Joukko $E \subset A$ on suljettu A:ssa jos ja vain jos on olemassa sellainen M:n suljettu joukko F, että $E = F \cap A$.*

Todistus. Osoitetaan väite (a). Väite (b) osoitetaan luennolla.

$\Longleftarrow$ Oletetaan, että V on avoin M:ssä. Jos $V \cap A = \emptyset$, niin $V \cap A$ on triviaalisti avoin A:ssa. Oletetaan, että $V \cap A \neq \emptyset$, ja olkoon $x \in V \cap A$. Tällöin on olemassa avoin pallo $B(x,r)$ siten, että $B(x,r) \subset V$. Nyt $B_{d_A}(x,r) = B(x,r) \cap A \subset V \cap A$, joten $V \cap A$ on avoin A:ssa.

$\Longrightarrow$ Oletetaan kääntäen, että U on avoin A:ssa. Tällöin jokaista pistettä $x \in U$ on olemassa $r_x > 0$ siten, että $B_{d_A}(x,r_x) \subset U$. Nyt

$$U = \bigcup_{x \in U} B_{d_A}(x,r_x) = \bigcup_{x \in U} (B(x,r_x) \cap A) = V \cap A,$$

missä $V = \cup_{x \in U} B(x,r_x)$ avoimien pallojen yhdisteenä avoin M:ssä Lauseiden 6.3 ja 6.4 nojalla. □

8. Jonon raja-arvo ja joukon sulkeuma

Syvennetään aluksi jonon raja-arvon käsitteen ymmärtämistä.

Lause 8.1. *Olkoon (M,d) metrinen avaruus. Jos $\{x_n\}$ ja $\{y_n\}$ ovat jonoja joukossa M siten, että $x_n \to x$ ja $y_n \to y$, niin $d(x_n,y_n) \to d(x,y)$.*

Lause 8.2. *Olkoon (M,d) metrinen avaruus, ja olkoon $\{x_n\}$ jono joukon M erillisiä pisteitä siten, että $x_n \to x \in M$. Olkoon A jonon $\{x_n\}$ pisteiden muodostama joukko, ja olkoon $f : A \to A$ bijektio. Tällöin $f(x_n) \to x$.*

Olkoon A metrisen avaruuden M osajoukko. Tällöin on olemassa suljettuja joukkoja, jotka sisältävät joukon A, esimerkiksi joukko M. Olkoon $\overline{A}$ kaikkien niiden joukon M suljettujen joukkojen leikkaus, jotka kukin sisältävät joukon A. Tällöin $\overline{A}$ on suljettu Lauseen 7.6 nojalla, ja vieläpä pienin sellaisista suljetuista joukoista, jotka sisältävät joukon A. Joukkoa $\overline{A}$ sanotaan joukon A sulkeumaksi (closure of A).

Joukon sulkeuma voidaan samaistaa ympäristöjen ja jonojen suppenemisen kanssa seuraavassa mielessä.

Lause 8.3. *Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $A \subset M$. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

(a) $x \in \overline{A}$;

(b) Pisteen x jokaiselle ympäristölle V on voimassa $V \cap A \neq \emptyset$;

(c) On olemassa jono joukon A pisteitä, joka suppenee kohti pistettä x.

Todistus. Väitteet (b) ja (c) ovat ekvivalentteja Lauseen 7.2 nojalla. Osoitetaan implikaatio (a) $\Rightarrow$ (b). Oletetaan siis, että $x \in \overline{A}$. Olkoon V pisteen x ympäristö. Ympäristön määritelmän nojalla voidaan itse asiassa olettaa, että V on avoin. Tehdään vastaoletus, että $V \cap A = \emptyset$. Koska V on avoin, niin Lauseen 7.4 nojalla $T = M \setminus V$ on suljettu. Koska $V \cap A = \emptyset$, niin $A \subset T$. Sulkeuman määritelmän nojalla $\overline{A} \subset T$, joten $x \in T$. Mutta tämä on ristiriita, joten $V \cap A \neq \emptyset$. Jäljellä oleva implikaatio (c) $\Rightarrow$ (a) osoitetaan luennolla. $\square$

Huomautus. Joukon $A \subset \mathbb{R}^n$ sulkeuma määriteltiin kasaantumispisteiden avulla Luvussa 4, kun taas yleisen metrisen avaruuden osajoukon sulkeuma määritellään suljettujen joukkojen leikkauksena. Lauseiden 4.14 ja 8.3 nojalla nämä lähestymistavat ovat kuitenkin ekvivalentteja.

Lause 8.4. *Olkoot A ja B metrisen avaruuden osajoukkoja. Tällöin seuraavat väitteet ovat voimassa.*

(a) $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$;

(b) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Todistus. Osoitetaan väite (a). Oletetaan siis, että $A \subset B$. Olkoon $x \in \overline{A}$ ja osoitetaan, että $x \in \overline{B}$. Lauseen 8.3 nojalla $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$. Koska $A \subset B$, niin $B(x, r) \cap B \neq \emptyset$ kaikilla $r > 0$. Edelleen Lauseen 8.3 nojalla $x \in \overline{B}$. $\square$

Määritelmä 8.5. Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Pistettä $x \in M$ sanotaan joukon $A \subset M$ rajapisteeksi (limit point), jos x kuuluu joukon $A \setminus \{x\}$ sulkeumaan.

Jos $x \notin A$, niin x on joukon A rajapiste, jos ja vain jos $x \in \overline{A}$.

Lause 8.6. *Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Olkoon $A \subset M$ ja $x \in M$. Tällöin x on joukon A rajapiste, jos ja vain jos on olemassa jono $\{x_n\}$ joukon A pisteitä siten, että $x_n \to x$ ja $x_n \neq x$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.*

Todistus. Oletetaan, että x on joukon A rajapiste. Määritelmän nojalla $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. Lauseen 8.3 nojalla jokaiselle pisteen x ympäristölle V on voimassa $V \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$. Erityisesti $B(x, \frac{1}{n}) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Valitaan $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap (A \setminus \{x\})$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Valinnasta johtuen $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$ ja $x_n \neq x$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, eli $x_n \to x$. Käänteinen suunta osoitetaan luennolla. $\square$

9. Sisäpisteet ja reunapisteet

Määritelmä 9.1. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $A \subset M$. Pistettä $x \in A$ kutsutaan joukon A sisäpisteeksi (interior point), jos on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x,r) \subset A$. Joukon A sisäpisteiden joukkoa merkitään $\operatorname{Int}(A)$ (the interior of A).

Määritelmästä seuraa, että:

- Yleisesti on voimassa $\operatorname{Int}(A) \subset A$.
- $\operatorname{Int}(A) = A$, jos ja vain jos A on avoin.
- Jos $A \subset B$, niin $\operatorname{Int}(A) \subset \operatorname{Int}(B)$.
- $x \in \operatorname{Int}(\overline{B}(x,r))$, sillä $B(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$.

Lause 9.2. $\operatorname{Int}(A)$ *on suurin avoin joukko, joka sisältyy joukkoon* A.

Todistus. Osoitetaan ensin, että $\operatorname{Int}(A)$ on avoin joukko. Olkoon $x \in \operatorname{Int}(A)$. Tällöin x on joukon A sisäpiste, joten on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x,r) \subset A$. Lauseen 6.3 nojalla pallo $B(x,r)$ on avoin, joten jokainen piste $y \in B(x,r)$ on joukon $B(x,r)$ sisäpiste, ja täten myös joukon A sisäpiste. Siis $B(x,r) \subset \operatorname{Int}(A)$, eli $\operatorname{Int}(A)$ on avoin.

On selvää, että $\operatorname{Int}(A) \subset A$. Olkoon $C \subset A$ avoin, ja olkoon $x \in C$. Avoimen joukon määritelmän nojalla on olemassa $r > 0$ siten, että $B(x,r) \subset C \subset A$, eli x on joukon A sisäpiste, jolloin $x \in \operatorname{Int}(A)$. Olemme osoittaneet, että $C \subset \operatorname{Int}(A)$. Näin ollen $\operatorname{Int}(A)$ on joukkoon A sisältyvistä avoimista joukoista suurin. □

Lause 9.3. *Olkoon* (M, d) *metrinen avaruus, ja olkoon* $A \subset M$. *Tällöin*

(a) $\operatorname{Int}(A) = M \setminus (\overline{M \setminus A})$;

(b) $\operatorname{Int}(A) = \operatorname{Int}(\operatorname{Int}(A))$.

Määritelmä 9.4. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $A \subset M$. Joukon A reuna (boundary of A) on joukko $\operatorname{Bd}(A) = \overline{A} \cap \overline{M \setminus A}$.

Määritelmästä seuraa, että:

- Reuna on kahden suljetun joukon leikkauksena suljettu joukko.
- Jos $x \in \operatorname{Bd}(A)$, niin pallo $B(x,r)$ sisältää sekä joukon A että joukon $M \setminus A$ pisteitä kaikilla $r > 0$. (Väite seuraa, kun Lausetta 8.3 sovelletaan joukkoihin $\overline{A}$ ja $\overline{M \setminus A}$.)
- $A \cup \operatorname{Bd}(A) = A \cup (\overline{A} \cap \overline{M \setminus A}) = (A \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{M \setminus A}) = \overline{A} \cap M = \overline{A}$ (vrt. (4.2)). Näistä ainoastaan toiseksi viimeiseen yhtäsuuruuteen liittyvä väite $A \cup \overline{M \setminus A} = M$ kaipaa lisäperusteluja. Mutta tämäkin seuraa huomaamalla, että $A \cup \overline{M \setminus A} \subset M$ ja $M = A \cup (M \setminus A) \subset A \cup \overline{M \setminus A}$.

Lause 9.5. *Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $A \subset M$. Tällöin*

(a) $\mathrm{Bd}\,(A) = \mathrm{Bd}\,(M \setminus A)$;

(b) $\mathrm{Bd}\,(A) = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}\,(A)$.

Todistus. Väite (a) seuraa reunan määritelmästä, ja väite (b) Lauseesta 9.3(a). □

Esimerkki 9.6. Tarkastellaan metristä avaruutta $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Osoitetaan, että

(a) $\mathrm{Bd}\,([0,1]) = \mathrm{Bd}\,(]0,1[) = \{0,1\}$;

(b) $\mathrm{Bd}\,(\mathbb{Q}) = \mathrm{Bd}\,(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Pisteet 0 ja 1 ovat joukkojen $[0,1]$ ja $]0,1[$ reunapisteitä, sillä pallot $B(0,r) =]-r, r[$ ja $B(1,r) =]1-r, 1+r[$ sisältävät sekä joukon $]0,1[$ pisteitä että joukon $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ pisteitä kaikilla $r > 0$. Muita reunapisteitä ei ole, sillä $]0,1[$ on avoimena pallona avoin joukko ja $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ on vastaavasti suljetun joukon komplementtina avoin joukko. Näin ollen sekä $]0,1[$ että $\mathbb{R} \setminus [0,1]$ koostuvat ainoastaan sisäpisteistään.

Kohdan (b) väite $\mathrm{Bd}\,(\mathbb{Q}) = \mathrm{Bd}\,(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ seuraa Lauseen 9.5(a) nojalla. Riittää siis osoittaa, että $\mathrm{Bd}\,(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$. Itse asiassa riittää osoittaa, että

$$\overline{Q} = \mathbb{R} \quad \text{ja} \quad \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}, \tag{9.1}$$

sillä jos väitteet (9.1) ovat voimassa, niin reunan määritelmän nojalla

$$\mathrm{Bd}\,(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Seuraavassa yleisen metrisen avaruuden vastine Lauseelle 4.16.

Lause 9.7. *Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $A \subset M$. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

(a) *A on suljettu;*

(b) $A = \overline{A}$;

(c) $\mathrm{Bd}\,(A) \subset A$.

Seuraavan tuloksen mukaan joukolla ja sen sulkeumalla on sama halkaisija.

Lause 9.8. *Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon $A \subset M$. Tällöin*

$$\mathrm{diam}\,(A) = \mathrm{diam}\,(\overline{A}).$$

Todistus. Jos $A = \emptyset$, niin $\overline{A} = \emptyset$. Oletetaan siis, että $A \neq \emptyset$. Merkitään

$$a = \mathrm{diam}\,(A) \quad \text{ja} \quad b = \mathrm{diam}\,(\overline{A}).$$

Koska $A \subset \overline{A}$, niin selvästi

$$a = \sup_{x,y \in A} d(x,y) \leq \sup_{x,y \in \overline{A}} d(x,y) = b.$$

Riittää siis osoittaa, että $a \geq b$. Tehdään vastaoletus, että $a < b$. Koska nyt $b > 0$, niin joukossa $\overline{A}$ on vähintään kaksi pistettä. Edelleen supremumin määritelmän nojalla on olemassa $x, y \in \overline{A}$ siten, että $d(x,y) \geq \frac{a+b}{2}$. Koska $x, y \in \overline{A}$, niin Lauseen 8.3 nojalla on olemassa jonot $\{x_n\}$ ja $\{y_n\}$ joukon A pisteitä siten, että $x_n \to x$ ja $y_n \to y$. Koska $x_n, y_n \in A$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin $d(x_n, y_n) \leq a$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Lauseen 8.1 nojalla $d(x_n, y_n) \to d(x,y)$. Edelleen reaalilukujonojen raja-arvot säilyttävät järjestyksen (ks. Analyysi I), joten $d(x,y) \leq a$. Kokoamalla havainnot yhteen, saadaan

$$d(x,y) \leq a < \frac{a+b}{2} \leq d(x,y),$$

mikä on ristiriita. Siis $a \geq b$. □

Huomautus. Tässä luvussa olemme osoittaneet, että

$$\overline{A} = A \cup \mathrm{Bd}\,(A) \quad \text{ja} \quad \mathrm{diam}\,(\overline{A}) = \mathrm{diam}\,(A).$$

Näistä ei pidä tehdä johtopäätöstä, että $\mathrm{diam}\,(\mathrm{Bd}\,(A)) = 0$. Tarkastellaan esim. joukkoa $A = [0,1]$ metrisessä avaruudessa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Tällöin $\mathrm{diam}\,(\mathrm{Bd}\,(A)) = \mathrm{diam}\,(\{0,1\}) = 1$.

10. Metriikkojen ekvivalenssi

Reaalilukujen joukkoon $\mathbb{R}$ voidaan tavanomaisen itseisarvon lisäksi liittää muitakin metriikoita. Esimerkiksi Laskuharjoitusten 3 mukaan jokainen kuvaus $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $d(x,y) = |f(x) - f(y)|$, missä $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on injektio, on joukon $\mathbb{R}$ metriikka.

Yleiselläkin pistejoukolla M voi olla useita metriikoita. Oleellista on eroittaa, ovatko nämä metriikat oleellisesti samat, eli ns. ekvivalentit.

Määritelmä 10.1. Olkoot d_1 ja d_2 joukon M metriikoita. Sanotaan, että d_1 ja d_2 ovat ekvivalentteja, mikäli ne määräävät samat avoimet joukot. Toisin sanoen, jos $A \subset M$, niin A on d_1-avoin jos ja vain jos A on d_2-avoin.

Lause 10.2. *Olkoot d_1 ja d_2 joukon M metriikoita. Jos on olemassa vakiot $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ siten, että*

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_1(x,y) \tag{10.1}$$

kaikilla $x, y \in M$, niin d_1 ja d_2 ovat ekvivalentteja.

Lauseen 10.2 väite ei päde käänteiseen suuntaan. Esimerkiksi $d_1(x,y) = |x-y|$ ja $d_2(x,y) = |x^3 - y^3|$ ovat ekvivalentteja metriikoita joukossa $\mathbb{R}$. Kuitenkaan ei ole olemassa vakioita $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ siten, että kaksoisepäyhtälö (10.1) olisi voimassa, sillä

$$d_2(x,y) = |x^3 - y^3| = |x-y||x^2 + xy + y^2| = d_1(x,y)|x^2 + xy + y^2|,$$

missä lauseke $|x^2 + xy + y^2|$ ei ole ylhäältä eikä alhaalta rajoitettu.

Seuraus 10.3. *Olkoot d_1 ja d_2 joukon M metriikoita. Oletetaan, että on olemassa vakiot $\alpha > 0$ ja $\beta > 0$ siten, että (10.1) on voimassa. Olkoon $x \in M$ piste ja $\{x_n\}$ jono joukon M pisteitä. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

(a) $d_1(x, x_n) \to 0$;

(b) $d_2(x, x_n) \to 0$.

Todistus. Oletetaan, että $d_1(x, x_n) \to 0$. Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin on olemassa $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että $d_1(x, x_n) < \frac{\varepsilon}{\beta}$ kaikilla $n \geq N(\varepsilon)$. Ehdon (10.1) nojalla $d_2(x, x_n) < \beta \cdot \frac{\varepsilon}{\beta} = \varepsilon$ kaikilla $n \geq N(\varepsilon)$, eli $d_2(x, x_n) \to 0$. Käänteinen suunta osoitetaan vastaavasti. $\square$

Esimerkki 10.4. Jatkossa tarvitsemme apufunktiota $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\varphi(t) = \frac{t}{1+t}$. Funktiolla φ on seuraavat perusominaisuudet.

(P1) $\varphi(0) = 0$;

(P2) $\varphi(t) > 0$ kaikilla $t \in \mathbb{R}_+$;

(P3) φ on aidosti kasvava;

(P4) $\varphi(t + u) \leq \varphi(t) + \varphi(u)$ kaikilla $t, u \in \mathbb{R}_+$;

(P5) $\varphi(t) < 1$ kaikilla $t \in \mathbb{R}_+$.

Väitteet (P1), (P2) ja (P5) ovat selviä. Väite (P3) on voimassa, sillä $\varphi'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} > 0$ kaikilla $t > 0$. Väite (P4) puolestaan seuraa päättelystä

$$\begin{aligned} \varphi(t+u) &= \frac{t+u}{1+t+u} = \frac{t}{1+t+u} + \frac{u}{1+t+u} \\ &\leq \frac{t}{1+t} + \frac{u}{1+u} = \varphi(t) + \varphi(u), \end{aligned}$$

joka on voimassa kaikille $t, u \in \mathbb{R}_+$.

Esimerkki 10.5. Olkoon (M, d) metrinen avaruus, ja olkoon φ kuten Esimerkissä 10.4. Määritellään kuvaus $d' = \varphi \circ d$, eli

$$d'(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \quad x, y \in M.$$

Osoitetaan, että d' on metriikka joukossa M tarkistamalla ehdot (M1)–(M4):

(M1) $d'(x, x) = \frac{d(x,x)}{1+d(x,x)} = \frac{0}{1+0} = 0$.

(M2) Jos $x \neq y$, niin $d(x, y) > 0$, ja edelleen $d'(x, y) > 0$ kohdan (P2) nojalla.

(M3) $d'(x, y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x)}{1+d(y,x)} = d'(y, x)$.

(M4) Olkoot $x, y, z \in M$. Kolmioepäyhtälöstä $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ seuraa kohtien (P3) ja (P4) nojalla, että

$$\begin{aligned} d'(x, z) &= \varphi(d(x, z)) \leq \varphi(d(x, y) + d(y, z)) \\ &\leq \varphi(d(x, y)) + \varphi(d(y, z)) = d'(x, y) + d'(y, z). \end{aligned}$$

Luennolla osoitetaan, että d ja d' ovat ekvivalentteja.

Huomautus. Olkoon (M, d) metrinen avaruus. Tällöin ominaisuuden (P5) nojalla

$$\operatorname{diam}_{d'}(M) = \sup_{x,y \in M} d'(x, y) \leq 1,$$

eli M on rajoitettu ekvivalentin metriikan d' suhteen. Siten esimerkiksi reaalilukujen joukko $\mathbb{R}$ on rajoitettu (eli sillä on rajoitettu halkaisija) metriikan $d'(x, y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ suhteen.

Esimerkki 10.6. Taksiautoetäisyys. Pisteiden $\overline{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ja $\overline{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ välinen taksiautoetäisyys on

$$d_T(\overline{x}, \overline{y}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|.$$

On helppoa osoittaa, että d_T on metriikka joukossa $\mathbb{R}^2$. Edelleen Lausetta 10.2 soveltaen nähdään, että d_T on ekvivalentti joukon $\mathbb{R}^2$ standardin metriikan

$$d(\overline{x}, \overline{y}) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

kanssa. Itse asiassa $d(\overline{x}, \overline{y}) \leq d_T(\overline{x}, \overline{y}) \leq \sqrt{2} d(\overline{x}, \overline{y})$.

11. Jatkuva kuvaus

Reaalifunktion jatkuvuus kurssilla Analyysi I: Kuvaus $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on jatkuva pisteessä $x_0 \in \mathbb{R}$, jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$|x_0 - x| < \delta \implies |f(x_0) - f(x)| < \varepsilon.$$

Jos f on jatkuva joukon $\mathbb{R}$ jokaisessa pisteessä, niin sanotaan, että f on jatkuva.

Kahden metrisen avaruuden välillä operoivan funktion jatkuvuus määritellään täysin analogisesti, kuten seuraavassa nähdään.

Määritelmä 11.1. Olkoot (X, d_1) ja (Y, d_2) metrisiä avaruuksia, sekä $f : X \to Y$ kuvaus. Sanotaan, että f on jatkuva pisteessä $x_0 \in X$ (continuous at x_0), jos jokaista $\varepsilon > 0$ vastaa $\delta > 0$ siten, että

$$d_1(x_0, x) < \delta \implies d_2(f(x_0), f(x)) < \varepsilon.$$

Jos f on jatkuva joukon X jokaisessa pisteessä, niin sanotaan, että f on jatkuva.

Jatkuvuus yhdessä pisteessä voidaan ilmaista ympäristöjen tai suppenemisen avulla:

Lause 11.2. *Olkoot* (X, d_1) *ja* (Y, d_2) *metrisiä avaruuksia,* $f : X \to Y$ *kuvaus, sekä* $x_0 \in X$ *piste. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

(a) f *on jatkuva pisteessä* x_0*;*

(b) Jokaista pisteen $f(x_0) \in Y$ *ympäristöä* V *vastaa pisteen* x_0 *ympäristö* U *siten, että* $f(U) \subset V$*;*

(c) Jos jono $\{x_n\}$ *joukon* X *pisteitä suppenee kohti pistettä* x_0*, niin tällöin jono* $\{y_n\} := \{f(x_n)\}$ *suppenee kohti pistettä* $y_0 := f(x_0)$*.*

Todistus. Osoitetaan väitteiden (a) ja (b) ekvivalenttisuus.

Oletetaan, että f on jatkuva pisteessä x_0. Olkoon V pisteen $f(x_0)$ mielivaltainen ympäristö. Ympäristön määritelmän nojalla on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että $B(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. Jatkuvuuden nojalla tätä lukua $\varepsilon > 0$ vastaa luku $\delta > 0$ siten, että

$$d_1(x, x_0) < \delta \implies d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon. \tag{11.1}$$

Toisin sanoen, $f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon) \subset V$. Voidaan siis valita $U = B(x_0, \delta)$.

Oletetaan kääntäen, että väite (b) on voimassa. Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $V = B(f(x_0), \varepsilon)$. Oletuksen (b) nojalla ympäristöä V vastaa ympäristö $U \ni x_0$ siten, että $f(U) \subset V$. Edelleen ympäristö U sisältää pallon $B(x_0, \delta)$ jollekin $\delta > 0$. Näin ollen

$$f(B(x_0, \delta)) \subset B(f(x_0), \varepsilon),$$

eli (11.1) on voimassa, eli f on jatkuva pisteessä x_0. □

Globaali jatkuvuus voidaan ilmaista avoimien ja suljettujen joukkojen avulla:

Lause 11.3. *Olkoot* (X, d_1) *ja* (Y, d_2) *metrisiä avaruuksia, sekä* $f : X \to Y$ *kuvaus. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

(a) f *on jatkuva;*

(b) Jokaisen avoimen joukon alkukuva on avoin, ts. jos $V \subset Y$ *on avoin* Y*:ssä, niin* $f^{-1}(V) := \{x \in X : f(x) \in V\}$ *on avoin* X*:ssä;*

(c) Jokaisen suljetun joukon alkukuva on suljettu, ts. jos $F \subset Y$ *on suljettu* Y*:ssä, niin* $f^{-1}(F) := \{x \in X : f(x) \in F\}$ *on suljettu* X*:ssä.*

Edellä esiintynyt merkintä $f^{-1}(V)$ tarkoittaa joukon $V \subset Y$ alkukuvaa (inverse image) joukossa X. Tässä yhteydessä kuvauksen f ei tarvitse olla bijektio, eikä käänteiskuvauksen f^{-1} tarvitse olla olemassa.

Lauseen 11.3 todistus. Osoitetaan väitteiden (a) ja (b) ekvivalenttisuus.

Oletetaan, että f on jatkuva. Olkoon $V \subset Y$ avoin, ja olkoon $x \in f^{-1}(V)$. Tällöin $f(x) \in V$. Koska V on nyt pisteen $f(x)$ ympäristö, niin Lauseen 11.2 mukaan on olemassa pisteen x ympäristö U siten, että $f(U) \subset V$. Koska nyt $x \in U \subset f^{-1}(V)$, niin Lauseen 6.7 nojalla $f^{-1}(V)$ on avoin.

Oletetaan kääntäen, että väite (b) on voimassa. Osoitetaan funktion f jatkuvuus mielivaltaisesti valitussa pisteessä $x \in X$. Olkoon V pisteen $f(x)$ ympäristö. Voidaan olettaa, että V on avoin. Oletuksen (b) nojalla joukko $f^{-1}(V)$ on avoin X:ssä, ja täten $f^{-1}(V)$ sisältää pisteen x ympäristön U. Koska $f(U) \subset V$, niin Lauseen 11.2 nojalla f on jatkuva pisteessä x. $\square$

Lauseen 11.3 väitteiden (b) ja (c) ekvivalenttisuuden todistamista varten tarvitaan seuraava aputulos.

Lemma 11.4. *Olkoot X ja Y joukkoja, sekä $f : X \to Y$ kuvaus. Jos B_1 ja B_2 ovat mielivaltaisia joukon Y osajoukkoja, niin $f^{-1}(B_1 \setminus B_2) = f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2)$.*

Määritelmä 11.5. Metrisen avaruuden M osajoukko A on tiheä joukossa M (dense in M), jos $\overline{A} = M$.

Kaavan (9.1) mukaan $\mathbb{Q}$ on tiheässä joukossa $\mathbb{R}$.

Lemma 11.6. *Olkoot f ja g jatkuvia funktioita metriseltä avaruudelta X metriselle avaruudelle Y. Tällöin joukko $B = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ on suljettu X:ssä.*

Lause 11.7. *Olkoot f ja g jatkuvia funktioita metriseltä avaruudelta X metriselle avaruudelle Y, ja olkoon A joukon X tiheä osajoukko. Jos $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in A$, niin tällöin $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in X$.*

Esimerkki 11.8. Olkoot $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jatkuvia funktioita siten, että $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{Q}$. Tällöin Lauseen 11.7 nojalla $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

12. Cauchyn jono

Kerrataan aluksi reaalilukujonon monotonisuuteen liittyviä perusasioita.

Määritelmä 12.1. Reaalilukujono $\{x_n\}$ on

(a) kasvava, jos $x_n \leq x_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$;

(b) vähenevä, jos $x_n \geq x_{n+1}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Reaalilukujono $\{x_n\}$ on monotoninen, jos se on joko kasvava tai vähenevä.

Määritelmä 12.2. Reaalilukujono $\{x_n\}$ on

(a) ylhäältä rajoitettu, jos on olemassa $M \in \mathbb{R}$ siten, että $x_n \leq M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$;

(b) alhaalta rajoitettu, jos on olemassa $m \in \mathbb{R}$ siten, että $x_n \geq m$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Reaalilukujono $\{x_n\}$ on rajoitettu, jos se on sekä ylhäältä että alhaalta rajoitettu.

Lause 12.3. *(Monotonic Sequence Theorem) Jokainen monotoninen ja rajoitettu reaalilukujono suppenee.*

Seuraavaksi tarkastellaan Cauchyn jonoja yleisessä metrisessä avaruudessa. Kun Cauchyn jonossa edetään riittävän pitkälle, ovat jonon pisteet mielivaltaisen lähellä toisiaan. Tämä ominaisuus on hyvin lähellä jonon suppenemista.

Määritelmä 12.4. Jono $\{x_n\}$ metrisen avaruuden (M, d) pisteitä on Cauchyn jono, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ kaikilla $n, m \geq N$.

Lause 12.5. *Jokainen suppeneva jono metrisessä avaruudessa on Cauchyn jono.*

Lause 12.5 ei yleisessä tapauksessa päde käänteisesti, eli Cauchyn jono ei välttämättä suppene. Tarkastellaan jonoa $\{x_n\}$, missä $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Analyysi I:n pohjalta tiedetään, että $x_n \to e$. Lauseen 12.5 nojalla $\{x_n\}$ on Cauchyn jono metrisessä avaruudessa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Koska $x_n \in \mathbb{Q}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin tästä seuraa edelleen, että $\{x_n\}$ on Cauchyn jono metrisessä avaruudessa $(\mathbb{Q}, |\cdot|_{\mathbb{Q}})$. Kuitenkin $e \notin \mathbb{Q}$, joten $\{x_n\}$ ei suppene avaruudessa $(\mathbb{Q}, |\cdot|_{\mathbb{Q}})$. Aiheeseen palataan tarkemmin Luvussa 13.

Määritelmä 12.6. Jonon $\{x_n\}$ osajono on muotoa $\{y_k\}$ oleva jono, jossa jokaista $k \in \mathbb{N}$ vastaa $n_k \in \mathbb{N}$ siten, että $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$ ja $y_k = x_{n_k}$.

Osajono on siis vain jono alkuperäisetä jonosta järjestyksessä poimittuja pisteitä. Erikoistapauksessa $n_k = k$ osajono on alkuperäinen jono itse. Jonolla voi olla useita eri osajonoja. Esimerkiksi jonolla

$$1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, 0, \ldots$$

on mm. osajonot $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$, $0, 0, 0, 0, \ldots$, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \ldots$, jne.

Vaikka Cauchyn jono ei yleisessä tapauksessa suppenekaan, niin seuraava osajonoihin liittyvä tulos on kuitenkin voimassa.

Lause 12.7. *Olkoon $\{x_n\}$ Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (M, d). Jos jonolla $\{x_n\}$ on pistettä $x_0 \in M$ kohti suppeneva osajono, niin jono $\{x_n\}$ itse suppenee myös kohti pistettä x_0.*

Pyrimme osoittamaan, että Cauchyn jonot suppenevat metrisessä avaruudessa $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Tätä varten tarvitsemme pari aputulosta. Ensiksi osoitetaan, että jokaisen Cauchyn jonon muodostama pistejoukko on rajoitettu.

Lemma 12.8. *Olkoon $\{x_n\}$ Cauchyn jono metrisessä avaruudessa (M, d), ja olkoon $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ko. jonon pisteiden muodostama joukko. Tällöin* $\operatorname{diam}(A) < \infty$.

Lemma 12.9. *Olkoon $\{x_n\}$ jono erillisiä reaalilukuja. Tällöin jonolla $\{x_n\}$ on monotoninen osajono.*

Lause 12.10. *Cauchyn jonot suppenevat metrisessä avaruudessa* $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

Todistus. Olkoon $\{x_n\}$ reaalinen Cauchyn jono. Lauseen 12.7 nojalla riittää osoittaa, että jonolla $\{x_n\}$ on suppeneva osajono. Jos joku luku $c \in \mathbb{R}$ toistetaan jonossa $\{x_n\}$ äärettömän monta kertaa, olemme löytäneet suppenevan osajonon, sillä vakiojono on suppeneva. Voimme siis olettaa, että kukin reaaliluku jonossa $\{x_n\}$ toistetaan korkeintaan äärellisen monta kertaa. Voidaan siis valita osajono, jossa on vain erillisiä reaalilukuja. Lemman 12.9 nojalla tällä osajonolla on edelleen osajono, joka on monotoninen. Edelleen Lemman 12.8 mukaan tämä osajono on rajoitettu, joka suppenee Lauseen 12.3 nojalla. □

13. Täydellinen metrinen avaruus

Määritelmä 13.1. Metrinen avaruus (M, d) on täydellinen (complete), jos jokainen Cauchyn jono joukon M pisteitä suppenee (kohti joukon M pistettä).

Lauseesta 12.10 saadaan seuraava tärkeä tulos:

Seuraus 13.2. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ *on täydellinen metrinen avaruus.*

Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{R}^n$ määritellään samaan tapaan kuin yleisessä metrisessä avaruudessakin: Jono $\{\overline{x}_k\}$ avaruuden $\mathbb{R}^n$ pisteitä on Cauchyn jono, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ kohti on olemassa luku $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ siten, että $||\overline{x}_k - \overline{x}_m|| < \varepsilon$ kaikilla $k, m \geq N(\varepsilon)$.

Merkitään $\overline{x}_k = (x_{1k}, x_{2k}, \ldots, x_{nk})$. Tällöin kaikilla $j = 1, 2, \ldots, n$ on voimassa

$$\begin{aligned} |x_{jk} - x_{jm}| &= \sqrt{(x_{jk} - x_{jm})^2} \\ &\leq \sqrt{(x_{1k} - x_{1m})^2 + (x_{2k} - x_{2m})^2 + \cdots + (x_{nk} - x_{nm})^2} \\ &= ||\overline{x}_k - \overline{x}_m||. \end{aligned}$$

Jos siis $\{\overline{x}_k\}$ on Cauchyn jono avaruudessa $\mathbb{R}^n$, niin koordinaattipisteiden muodostamat jonot $\{x_{jk}\}$ ovat Cauchyn jonoja avaruudessa $\mathbb{R}$ kaikilla $j = 1, 2, \ldots, n$. Lauseiden 12.10 ja 4.4 nojalla saadaan siis:

Seuraus 13.3. *Avaruus* $(\mathbb{R}^n, ||\cdot||)$ *on täydellinen kaikilla* $n \in \mathbb{N}$.

Lause 13.4. *Olkoon* (M, d) *täydellinen metrinen avaruus, ja olkoon* $A \subset M$. *Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

(a) A *on suljettu;*

(b) (A, d_A) *on täydellinen metrinen avaruus.*

Täydellisen metrisen avaruuden aliavaruus on siis täydellinen, jos ja vain jos kyseinen aliavaruus on suljettu.

Lause 13.5. *Olkoon M metrinen avaruus. Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

(a) M on täydellinen;

(b) Jos $\{A_n\}$ on jono joukon M suljettuja osajoukkoja siten, että $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$ ja $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$, niin $\cap_n A_n$ on epätyhjä.

Huomautus. Yleisessä tapauksessa, jos $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$, niin leikkaus $\cap_n A_n$ on joko tyhjä tai sisältää täsmälleen yhden pisteen. Tämän osoittamiseksi tehdään vastaoletus, että $x, y \in \cap_n A_n$, $x \neq y$. Tällöin $x, y \in A_n$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, joten $\operatorname{diam}(A_n) \geq d(x,y) > 0$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tämä on ristiriita oletuksen $\operatorname{diam}(A_n) \to 0$ kanssa.

Lause 13.6. *Olkoon (M,d) metrinen avaruus, ja olkoon A joukon M tiheä osajoukko. Oletetaan, että jokainen Cauchyn jono joukossa A suppenee kohti joukon M jotakin pistettä. Tällöin M on täydellinen.*

Todistus. Koska A on tiheä, niin $\overline{A} = M$. Olkoon $\{x_n\}$ Cauchyn jono joukossa M, ja olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $x_n \in \overline{A}$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$, niin Lauseen 8.3 nojalla jokaista pistettä x_n vastaa jono joukon A pisteitä, joka suppenee kohti pistettä x_n. Täten Lauseen 7.2 nojalla voidaan valita $y_n \in B(x_n, \varepsilon/3) \cap A$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Edellä konstruoitu jono $\{y_n\}$ koostuu siis joukon A pisteistä. Osoitetaan seuraavaksi, että $\{y_n\}$ on Cauchyn jono. Koska $\{x_n\}$ on Cauchyn jono, niin on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että $d(x_n, x_m) < \varepsilon/3$ kaikilla $n, m \geq N$. Kun $n, m \geq N$, niin

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &\leq d(y_n, x_n) + d(x_n, y_m) \\ &\leq d(y_n, x_n) + d(x_n, x_m) + d(x_m, y_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Jono $\{y_n\}$ on siis Cauchyn jono joukossa A. Oletuksen nojalla $y_n \to y$ jollekin $y \in M$.

Riittää osoittaa, että $x_n \to y$. Koska $y_n \to y$, niin on olemassa $M \in \mathbb{N}$, $M \geq N$, siten, että $d(y, y_n) < 2\varepsilon/3$ kaikilla $n \geq M$. Kun $n \geq M \geq N$, niin

$$d(y, x_n) \leq d(y, y_n) + d(y_n, x_n) < \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

joten $x_n \to y$. Siis Cauchyn jonot suppenevat joukossa M. □

Lause 13.7. *Olkoot A ja B metrisen avaruuden M osajoukkoja. Jos A ja B ovat täydellisiä (indusoidun metriikan suhteen), niin $A \cup B$ ja $A \cap B$ ovat myös täydellisiä.*

Todistus. Osoitetaan, että $A \cup B$ on täydellinen. Joukon $A \cap B$ täydelliseksi osoittaminen on laskuharjoitustehtävä. Olkoon $\{x_n\}$ Cauchyn jono joukon $A \cup B$ pisteitä. Osoitetaan, että jono $\{x_n\}$ suppenee kohti joukon $A \cup B$ jotakin pistettä.

Oletetaan aluksi, että joukossa A on äärellisen monta jonon $\{x_n\}$ pistettä. Poistetaan nämä pisteet jonosta $\{x_n\}$, jolloin saadaan osajono $\{y_n\}$, joka on Cauchyn jono (ks. Harjoitus 6) koostuen pelkästään joukon B pisteistä. Koska B on täydellinen, niin $y_n \to x_0$

jollekin $x_0 \in B \subset A \cup B$. Lauseen 12.7 mukaan $x_n \to x_0$. Vastaavasti käsitellään tapaus, jossa jonon $\{x_n\}$ pisteistä ainoastaan äärellisen monta sijaitsee joukossa B.

Oletetaan nyt, että kumpikin joukoista A ja B sisältää äärettömän monta jonon $\{x_n\}$ pistettä. Jono $\{x_n\}$ jakautuu nyt kahteen osajonoon $\{a_n\}$ ja $\{b_n\}$ siten, että $a_n \in A$ ja $b_n \in B$ kaikilla $n \in N$. Koska A ja B ovat täydellisiä, niin on olemassa $a_0 \in A$ ja $b_0 \in B$ siten, että $a_n \to a_0$ ja $b_n \to b_0$. Lauseen 12.7 mukaan $x_n \to a_0$ ja $x_n \to b_0$. Edelleen raja-arvon yksikäsitteisyyden nojalla $a_0 = b_0 \in A \cup B$. □

14. Tasaisesti jatkuva kuvaus

Määritelmä 14.1. Kuvaus f metriseltä avaruudelta (X, d_X) metriselle avaruudelle (Y, d_Y) on tasaisesti jatkuva (uniformly continuous), jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa luku $\delta > 0$ siten, että kaikilla $x, x_0 \in X$ on voimassa

$$d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

"Tavanomaisessa" jatkuvuuden määritelmässä epsilon-delta-tekniikkaa sovelletaan pisteittäin, kun taas tasaisen jatkuvuuden määritelmässä globaalisti. Toisin sanoen, tasaisesti jatkuvan funktion tapauksessa valittua lukua $\varepsilon > 0$ vastaa luku $\delta > 0$, joka "toimii" joukon X jokaisessa pisteessä.

Määritelmistä seuraa, että tasaisesti jatkuva funktio on myös jatkuva (tavanomaisessa mielessä). Jatkuva funktio ei kuitenkaan välttämättä ole tasaisesti jatkuva:

Esimerkki 14.2. Olkoon $X = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\}$. Tällöin $(X, |\cdot|_X)$ on metrinen avaruus, missä $|\cdot|_X$ on tavanomaisen itseisarvon rajoittuma joukkoon X. Edelleen $(X, |\cdot|_X)$ on selvästi diskreetti (ks. Määritelmä 6.8 ja Laskuharjoitus 7), eli jokaisen yksittäisen pisteen $x \in X$ muodostama joukko $\{x\}$ on avoin. Täten Lauseen 6.4 nojalla jokainen X:n osajoukko on avoin. Lauseen 11.3 nojalla mikä tahansa funktio f metriseltä avaruudelta $(X, |\cdot|_X)$ mihin tahansa toiseen metriseen avaruuteen on jatkuva, sillä alkukuvajoukot ovat joukon X osajoukkoina aina avoimia.

Määritellään nyt $f : X \to \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(1/n) = \begin{cases} 1, & n \text{ parillinen,} \\ 0, & n \text{ pariton.} \end{cases}$$

Edellä olevan nojalla f on jatkuva. Valitaan $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tällöin, olipa $\delta > 0$ kuinka pieni luku hyvänsä, niin on aina olemassa luvut $x_1, x_2 \in X$ siten, että $|x_1 - x_2|_X < \delta$, mutta $|f(x_1) - f(x_2)| = 1 > \varepsilon$. Siis f ei ole tasaisesti jatkuva.

Lause 14.3. *Olkoon f kuvaus metriseltä avaruudelta (X, d_X) metriselle avaruudelle (Y, d_Y). Tällöin seuraavat väitteet ovat ekvivalentteja.*

(a) *f ei ole tasaisesti jatkuva;*

(b) *On olemassa luku $\varepsilon > 0$ ja jonot $\{a_n\}$ ja $\{b_n\}$ joukon X pisteitä siten, että kaikilla $n \in N$ on voimassa $d_X(a_n, b_n) < \frac{1}{n}$ ja $d_Y(f(a_n), f(b_n)) \geq \varepsilon$.*

Esimerkin 14.2 funktio f ei ole tasaisesti jatkuva. Lauseen 14.3(b) mukaisiksi jonoiksi voidaan valita esimerkiksi $a_n = \frac{1}{2n}$ ja $b_n = \frac{1}{2n-1}$. Tällöin kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on voimassa

$$|a_n - b_n|_X = \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n(2n-1)} \leq \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}.$$

Edelleen $|f(a_n) - f(b_n)| = 1$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$.

Esimerkki 14.4. Olkoon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivoituva funktio, jonka derivaatta on rajoitettu. Osoitetaan, että f on tasaisesti jatkuva. Oletuksen nojalla on olemassa $C > 0$ siten, että $|f'(x)| \leq C$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Olkoot $a, b \in \mathbb{R}$ siten, että $a < b$. Tällöin väliarvolauseen nojalla on olemassa vakio $c \in]a, b[$ siten, että

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tästä seuraa, että $\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \leq C$, eli

$$|f(b) - f(a)| \leq C|b - a|.$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Tällöin

$$|b - a| < \delta \implies |f(b) - f(a)| < C\delta = \varepsilon.$$

Koska $a, b \in \mathbb{R}$ valittiin mielivaltaisesti, ja koska löydetty luku $\delta > 0$ ei riipu luvuista a, b, niin f on tasaisesti jatkuva.

Lause 14.5. *Tasaisesti jatkuva funktio kuvaa Cauchyn jonot Cauchyn jonoiksi.*

Lause 14.6. *Olkoot X ja Y metrisiä avaruuksia. Oletetaan, että X on täydellinen, ja että on olemassa jatkuva bijektio $f : X \to Y$ siten, että sen käänteiskuvaus $f^{-1} : Y \to X$ on tasaisesti jatkuva. Tällöin Y on täydellinen.*

15. Topologinen avaruus

Määritelmä 15.1. Topologinen avaruus $(X, \mathcal{T})$ (topological space) koostuu joukosta X ja kokoelmasta $\mathcal{T}$ sen osajoukkoja, joita kutsutaan avoimiksi joukoiksi, siten, että seuraavat ehdot ovat voimassa.

(T1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ ja $X \in \mathcal{T}$;

(T2) Jos $A_j \in \mathcal{T}$ kaikilla $j \in I$, niin $\cup_{j \in I} A_j \in \mathcal{T}$;

(T3) Jos $A_j \in \mathcal{T}$ kaikilla $j = 1, \ldots, n$, niin $\cap_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{T}$.

Topologiseen avaruuteen liittyvä joukkokokoelma $\mathcal{T}$ sisältää siis avoimien joukkojen mielivaltaiset yhdisteet ja äärelliset leikkaukset. Metrisessä avaruudessa tätä ominaisuutta vastaa Lause 6.4. Edelleen $\emptyset$ ja X ovat avoimia, kuten metrisen avaruuden tapauksessa.

Joukon X jokainen jokainen topologia $\mathcal{T}$ (topology) sisältää joka tapauksessa alkiot $\emptyset$ ja X. Näin ollen $\mathcal{T}_{\min} = \{\emptyset, X\}$ on suppein mahdollinen joukon X topologia. Kokoelmaa $\mathcal{T}_{\min}$ kutsutaan joukon X minitopologiaksi (minimal topology, trivial topology). Jos toisaalta $\mathcal{T}_{\text{dis}}$ on joukon X kaikkien osajoukkojen joukko, niin $\mathcal{T}_{\text{dis}}$ on selvästi joukon X topologia. Tällöin joukon X kaikki osajoukot, esimerkiksi yksiöt $\{x\}$, missä $x \in X$, ovat avoimia. Kokoelmaa $\mathcal{T}_{\text{dis}}$ kutsutaan joukon X diskreetiksi topologiaksi ja paria $(X, \mathcal{T}_{\text{dis}})$ diskreetiksi topologiseksi avaruudeksi. Joukolla X voi olla muitakin topologioita kuin $\mathcal{T}_{\min}$ tai $\mathcal{T}_{\text{dis}}$.

Äärellisellä joukolla $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ on äärellinen määrä osajoukkoja ja siten myös äärellinen määrä topologioita. Äärellinen joukko voidaan siis tehdä topologiseksi avaruudeksi vain äärellisen monella eri tavalla. Kaikki äärellisen joukon topologiat voidaan löytää suorittamalla äärellinen määrä kokeita ehtojen (T1)–(T3) voimassaolon selvittämiseksi.

Esimerkki 15.2. Olkoon $X = \{a, b, c\}$. Mitkä seuraavista ovat joukon X topologioita: $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$, $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $\mathcal{T}_3 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, c\}\}$?

Esimerkki 15.3. Jokaista $a \in \mathbb{R}$ kohti määritellään joukko $L_a = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ (open left ray). Tällöin joukkokokoelma

$$\mathcal{T} = \{L_a : a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$$

on joukon $\mathbb{R}$ topologia (left ray topology for $\mathbb{R}$).

Esimerkki 15.4. Joukon $\mathbb{R}$ standardi topologia. Olkoon $\mathcal{T}$ kokoelma joukon $\mathbb{R}$ osajoukkoja sisältäen joukot $\emptyset$ ja $\mathbb{R}$, sekä kaikki joukot A, joilla on seuraava ominaisuus: Jokaista $x_0 \in A$ vastaa avoin väli $]a, b[$ siten, että $x_0 \in]a, b[\subset A$. Tällöin $\mathcal{T}$ on joukon $\mathbb{R}$ topologia, ja sitä kutsutaan joukon $\mathbb{R}$ standardiksi topologiaksi.

Esimerkkejä joukoista, jotka kuuluvat joukon $\mathbb{R}$ standardiin topologiaan:
$]0, 1[$, $]1, 3[\cup \{x \in \mathbb{R} : x > 5\}$, L_a ja $\mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$.

Esimerkkejä joukoista, jotka eivät kuulu joukon $\mathbb{R}$ standardiin topologiaan:
$\{0\}$, $[1, 3[$, $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 5\}$ ja $\mathbb{N}$.

Esimerkki 15.5. Onko joukko $A = [0, 1]$ suljettu joukossa $\mathbb{R}$, kun $\mathbb{R}$ varustetaan

(a) standardilla topologialla;

(b) left ray -topologialla?

Lause 15.6. *Olkoon $X \neq \emptyset$ joukko. Tällöin*

$$\mathcal{T}_{\text{kof}} = \{A \subset X : X \setminus A \text{ on äärellinen}\} \cup \{\emptyset\} \tag{15.1}$$

on joukon X topologia.

Todistus. (T1) Määritelmän mukaan $\emptyset \in \mathcal{T}_{\text{kof}}$. Toisaalta $X \in \mathcal{T}_{\text{kof}}$, sillä $X \setminus X$ on äärellinen joukko.

(T2) Olkoon $\{A_j : j \in I\} \subset \mathcal{T}_{\text{kof}}$. Jos $A_j = \emptyset$ kaikilla $j \in I$, niin

$$\bigcup_{j \in I} A_j = \emptyset \in \mathcal{T}_{\text{kof}}.$$

Jos taas on olemassa $j_0 \in I$ siten, että $A_{j_0} \neq \emptyset$, niin $X \setminus A_{j_0}$ on äärellinen, ja edelleen

$$X \setminus \bigcup_{j \in I} A_j \subset X \setminus A_{j_0}$$

on äärellinen. Tällöin siis $\cup_{j \in I} A_j \in \mathcal{T}_{\text{kof}}$.

(T3) Olkoon $\{A_j : j = 1, \ldots, n\} \subset \mathcal{T}_{\text{kof}}$. Merkitään $B = \cap_{j=1}^{n} A_j$. Jos jokin joukoista A_j on $\emptyset$, niin $B = \emptyset \in \mathcal{T}_{\text{kof}}$. Muussa tapauksessa jokainen joukko $X \setminus A_j$, $j = 1, \ldots, n$, on äärellinen, joten myös

$$X \setminus B = \bigcup_{j=1}^{n} X \setminus A_j$$

on äärellisten joukkojen äärellisenä yhdisteenä äärellinen. Tällöin $B \in \mathcal{T}_{\text{kof}}$. □

Topologiaa (15.1) kutsutaan joukon X kofiniittiseksi topologiaksi (cofinite topology).

Lause 15.7. *Joukon X kofiniittinen topologia on sen diskreetti topologia (eli $\mathcal{T}_{\text{kof}} = \mathcal{T}_{\text{dis}}$), jos ja vain jos X on äärellinen joukko.*

Todistus. Oletetaan, että $\mathcal{T}_{\text{kof}} = \mathcal{T}_{\text{dis}}$. Tällöin jokainen yksiö $\{x\}$, $x \in X$, on avoin kofiniittisessa topologiassa, joten joukot $X \setminus \{x\}$ ovat äärellisiä. Koska

$$X = (X \setminus \{x\}) \cup \{x\},$$

niin X on äärellinen.

Oletetaan kääntäen, että X on äärellinen joukko. Olkoon $x \in X$. Inkluusio $\mathcal{T}_{\text{kof}} \subset \mathcal{T}_{\text{dis}}$ on aina voimassa. Käänteisen inkluusion $\mathcal{T}_{\text{dis}} \subset \mathcal{T}_{\text{kof}}$ osoittamiseksi riittää todistaa, että yksiö $\{x\}$ on avoin joukko X:n kofiniittisessa topologiassa (eli että $\{x\} \in \mathcal{T}_{\text{kof}}$). Mutta tämä seuraa siitä, että $X \setminus \{x\}$ on äärellinen joukko. □

Jos $\mathcal{T}_{\text{min}}$ on joukon X minitopologia, $\mathcal{T}_{\text{dis}}$ sen diskreetti topologia ja $\mathcal{T}$ sen mielivaltainen topologia, niin on voimassa, että

$$\mathcal{T}_{\text{min}} \subset \mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\text{dis}}.$$

Voidaan esimerkiksi valita $\mathcal{T} = \mathcal{T}_{\text{kof}}$.

Määritelmä 15.8. Olkoon $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ topologioita joukossa X. Jos $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$, niin sanotaan, että $\mathcal{T}_2$ on hienompi kuin $\mathcal{T}_1$, ja että $\mathcal{T}_1$ on karkeampi kuin $\mathcal{T}_2$.

Esimerkiksi joukon $\mathbb{R}$ standardi topologia on hienompi kuin left ray -topologia.

Muistisääntö: Topologiat ovat kuin seuloja. Hienossa seulassa on enemmän aukkoja kuin karkeassa. Hienossa topologiassa on enemmän avoimia joukkoja kuin karkeassa.

Jos $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ ovat joukon X topologioita, niin tavallisesti näistä ei kumpikaan ole toista hienompi. Toisin sanoen, topologiat eivät aina ole lainkaan vertailtavissa.

Esimerkki 15.9. Olkoon $X = \{a, b\}$, $\mathcal{T}_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$ ja $\mathcal{T}_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$. Tällöin $\mathcal{T}_1$ ja $\mathcal{T}_2$ ovat joukon X topologioita, mutta $\mathcal{T}_1 \not\subset \mathcal{T}_2$ ja $\mathcal{T}_2 \not\subset \mathcal{T}_1$.

Topologisessa avaruudessa suljettu joukko määritellään komplementin avulla (vrt. Lause 7.4).

Määritelmä 15.10. Olkoon $(X, \mathcal{T})$ topologinen avaruus. Joukko $F \subset X$ on suljettu, jos sen komplementti $F^c = X \setminus F$ on avoin. Toisin sanoen, $F \subset X$ on suljettu, jos $F^c \in \mathcal{T}$.

Metrisessä avaruudessa M kahdella erillisellä pisteellä $x, y \in M$ on aina pistevieraat palloympäristöt. Itse asiassa, Laskuharjoitusten 3 nojalla on olemassa avoimet joukot $U \subset M$ ja $V \subset M$ siten, että $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ ja $y \in V$. Vastaava ominaisuus ei ole voimassa yleiselle topologiselle avaruudelle, poikkeuksena ns. Hausdorffin avaruudet.

Määritelmä 15.11. Topologista avaruutta $(X, \mathcal{T})$ kutsutaan Hausdorffin avaruudeksi, jos se toteuttaa seuraavan ns. Hausdorffin ehdon: Jos $x, y \in X$, $x \neq y$, niin on olemassa avoimet joukot $U \in \mathcal{T}$ ja $V \in \mathcal{T}$ siten, että $U \cap V = \emptyset$, $x \in U$ ja $y \in V$.

Kertausta: Kaikki metriset avaruudet ovat Hausdorff-avaruuksia.

Lauseessa 11.3 osoitettiin, että kahden metrisen avaruuden välillä määritelty funktio on jatkuva, jos jokaisen maalijoukossa avoimen joukon alkukuva on avoin määrittelyjoukossa. Topologisessa avaruudessa tämä näkökulma otetaan jatkuvan kuvauksen määritelmäksi.

Määritelmä 15.12. Kahden topologisen avaruuden $(X, \mathcal{T}_X)$ ja $(Y, \mathcal{T}_Y)$ välillä määritelty funktio $f : X \to Y$ on jatkuva, jos jokaiselle $U \in \mathcal{T}_Y$ on voimassa $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$.

Esimerkki 15.13. Tarkastellaan funktiota $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Valitaan määrittelyjoukon topologiaksi left ray -topologia, ja maalijoukon topologiaksi joukon $\mathbb{R}$ standardi topologia. Joukko $]0, 1[$ on avoin standardissa topologiassa, ja sen alkukuvalle on voimassa

$$f^{-1}(]0, 1[) =]-1, 0[\cup]0, 1[.$$

Kumpikaan joukoista $]-1, 0[$ tai $]0, 1[$ ei ole avoin left ray -topologiassa, eikä näin ollen niiden yhdistekään ole avoin. Näillä topologiavalinnoilla avoimen joukon alkukuva ei aina ole avoin, joten $f(x) = x^2$ ei ole jatkuva.

Edellä jo todettiin, että diskreetissä topologisessa avaruudessa kaikki joukot ovat avoimia. Näin ollen diskreetissä topologisessa avaruudessa määritellyt funktiot ovat aina jatkuvia. Vertailun vuoksi kerrattakoon, että Luvun 11 luentoesimerkissä osoitettiin, että diskreetissä metrisessä avaruudessa määritellyt funktiot ovat jatkuvia.