

1. Tarkastellaan matriiseja

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & 3 & 8 \\ 2 & -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \\ 2 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Laske käsin mahdollisimman vähällä laskutoimituksilla matriisien tulon ABC rivillä 2 sarakkeessa 3 oleva luku.

b) Muotoile menettelysi matriisien osien poimimista koskevilla merkinnöillä (esim. $A(2, :)$ tarkoitti matriisin A toista riviä).

2. Onko kahden samankokoisen

a) symmetrisen neliömatriisin tulo aina symmetrinen?

b) yläkolmiomatriisin tulo aina yläkolmiomatriisi?

3. Olkoon A $m \times n$ -matriisi. Osoita, että matriisitulot $A^T A$ ja AA^T ovat määriteltyjä, määritä niiden dimensiot (ts. koot) ja osoita, että tulomatriisit ovat symmetrisiä.

4. Olkoot $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ja \mathbf{x} r -pystyvektori. Kuinka monta lukujen yhteen- ja kertolaskua tarvitaan laskettaessa (sulkujen osoittamassa järjestyksessä)

a) $(AB)\mathbf{x}$,

b) $A(B\mathbf{x})$?

c) Laske määrät tapauksissa $m = n = r = 10$, $m = n = r = 50$ ja $m = n = r = 100$.

5. Olkoot $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ja $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ (pystyvektoreita). Miten kannattaa ryhmitellä (suluilla) tulo $A\mathbf{x}\mathbf{y}^T B$, jotta kertolaskuja tulisi mahdollisimman vähän?

6. Ratkaise Gauss-Jordanin menetelmän matriisiversiolla yhtälöryhmä

$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

7. Määritä pisteiden

$$\mathbf{p} := (5 \ 3 \ -2)^T, \quad \mathbf{q} := (6 \ -2 \ 3)^T$$

kautta kulkevan suoran yhtälön vektori-, parametri- ja koordinaattimuodot.

8. Muodosta yhtälöryhmä suoran \mathbf{r} ja tason \mathbf{x} leikkauspisteen laskemista varten, kun

$$\mathbf{r} := \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad s, t, \in \mathbb{R}.$$

Laske leikkauspiste edullisimmalla löytämälläsi tavalla.