

1. Laske käänteismatriisin määritelmään nojautuen käänteismatriisi matriisille

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Olkoot  $A$  ja  $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$  säännöllisiä matriiseja ja  $\mathbf{b}$   $n$ -pystyvektori, jonka kaikki alkiot ovat ykkösiä. Sievennä perustellen

a)  $A(A^{-1}BA - A^{-1}BA^{-1})A$ ,

b)  $\mathbf{b}((A^{-1})^T A^T \mathbf{b})^T$ ,

c)  $\mathbf{b}^T((A^{-1})^T A^T \mathbf{b}^T)^T$ .

3. Määritä seuraavista alkeismatriiseista niiden tyypit, miten ne on saatu yksikkömatriisista ja mitkä ovat niiden käänteismatriisit:

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4. Laske matriisien

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}$$

käänteismatriisit alkeisoperaatioita käyttäen sekä ratkaise  $X$  matriisiyhtälöistä

a)  $AXA^{-1} = BA^{-1}$ , b)  $I + AB - XA^{-1} = A$ , c)  $BX = 2B$ .

5. Selvitä alkeisoperaatioita käyttäen onko seuraava matriisi  $B$  singulaarinen:

$$B := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Osoita, että matriisit

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -4 & -2 & 2 \\ 8 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad B := \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 1 \\ 12 & 12 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

ovat toistensa käänteismatriiseja. Ratkaise yhtälö  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , kun

a)  $\mathbf{b} = (3 \ 2 \ 1)^T$ , b)  $\mathbf{b} = (1 \ -2 \ 3)^T$ .

7. Etsi alkeismatriisit  $E_k$ , joilla vasemmalta kertomalla yksikkömatriisi muuntuu matriisiksi

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Laske  $A^{-1}$  kyseisiä alkeismatriiseja käyttäen.