Lineaarialgebra a, kevät 2019
Harjoitus 7 (5. ja 6.3., ti 12-14 ja 15-17, ke 12-14 ja 14-16 M304)

Kokeeseen ti 19.3.2019 klo 16.00–18.00 salissa M101 tulkaa hyvissä ajoin! Kannattaa osata monisteen Luvuissa 1–10 (sisältyen Liite A, muttei lukuja 5.6 ja 8) käsitellyt asiat, sekä demoihin 1–7 sisältyvät asiat. Erityisesti tulee esiintyneiden käsitteiden *määritelmien* olla kirkkaina mielessä. Koe sisältää ainakin yhden todistustehtävän. Laskin saa olla mukana tentissä ja sillä laskeakin, mutta tehtävän kannalta oleelliset laskut on oltava näkyvissä vastauspapereilla.
Kääntöpuolen **kertaustehtävät a** löydät piakkoin myös Kurssimateriaali-sivulta, samoin funktioita koskevat kertausdokumentit.
Moodle-kokeista harjoitteluineen lisää sähköpostilla ja verkkosivuilla!

1. a) Todista lineaariavaruuden *summan supistussääntö* (Lause 9.4.4 d): jos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in V$, niin

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w} \quad \iff \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

   b) Todista lineaariavaruuden *tulon supistussääntö* (Lause 9.4.4 e): jos $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ ja $\alpha \in \mathcal{K}$, $\alpha \neq 0$, niin

$$\alpha\mathbf{u} = \alpha\mathbf{v} \quad \iff \quad \mathbf{u} = \mathbf{v}$$

   Vihje: ratkaiseva tekijä on laskutoimitusten funktio-ominaisuus!

2. Olkoon V $\mathcal{K}$-kertoiminen lineaariavaruus. Osoita, että kaikilla $\alpha \in \mathcal{K}$, $\mathbf{u} \in V$ on

$$\ominus(\alpha\odot\mathbf{u}) = (-\alpha)\odot\mathbf{u} = \alpha\odot(\ominus\mathbf{u}).$$

   Opastus: On osoitettava, että molemmat vektorit $(-\alpha)\odot\mathbf{u}$ ja $\alpha\odot(\ominus\mathbf{u})$ kelpaavat alkion $\alpha\odot\mathbf{u}$ vasta-alkioiksi.

3. Olkoot $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ ja $\mathbf{x}$ erään reaalikertoimisen lineaariavaruuden vektoreita. Ratkaise (perustellen tarkasti laskusäännöillä yms.) $\mathbf{x}$ yhtälöstä $2\mathbf{x} + 3\mathbf{v} = -\mathbf{x} + \mathbf{u}$.

4. Osoita, että lineaariavaruudessa on voimassa laskusääntö

$$-(\alpha(\beta\mathbf{u} - \gamma\mathbf{v})) = (\alpha\gamma)\mathbf{v} - (\alpha\beta)\mathbf{u}.$$

5. Olkoon $(V, +, \cdot)$ $\mathcal{K}$-kertoiminen lineaariavaruus ja W sen aliavaruus. Osoita, että $(W, +, \cdot)$ on itsekin $\mathcal{K}$-kertoiminen lineaariavaruus.

6. Mitkä seuraavista joukoista ovat lineaariavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruuksia:
   a) $U_1 := \{\, (x_1\ x_2\ x_3)^T \mid 2x_1 - x_2 + x_3 + 1 = 0 \,\}$,
   b) $U_2 := \{\, (x_1\ x_2\ x_3)^T \mid x_2 - x_3 = 0,\ x_1 = 2x_3 \,\}$,
   c) $U_3 := \{\, (x_1\ x_2\ x_3)^T \mid x_2 = 0,\ x_1 = 2x_3 \,\}$,
   d) $U_4 := \{\, (x_1\ x_2\ x_3)^T \mid x_2 = x_3x_2 \,\}$?

7. Mitkä seuraavista joukoista ovat lineaariavaruuden $\mathbb{R}^{2\times 2}$ aliavaruuksia:
   a) kaikkien 2×2-diagonaalimatriisien joukko,
   b) kaikkien 2×2-yläkolmiomatriisien joukko,
   c) kaikkien symmetristen 2×2-matriisien joukko,
   d) kaikkien säännöllisten 2×2-matriisien joukko.

8. Osoita: lineaariavaruuden kahden aliavaruuden joukko-opillinen
   a) leikkaus on myös aliavaruus.
   b) yhdiste ei välttämättä ole aliavaruus.

Lineaarialgebra a:n kertaustehtäviä
Kurssimateriaali-sivuilla tarinaa ratkaisuista

1. Ovatko yhtälöryhmät

$$\text{a)}\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_2 = 3 \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{ja b)}\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

   ekvivalentteja?

2. Miten arvelet menetellyn seuraavassa laskussa:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \\ -2z = 1 \\ -y + 3z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} ?$$

   Mistä virhe johtuu?

3. Olkoot $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mielivaltaiset. Osoita, että matriisi $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ on symmetrinen.

4. Mitkä seuraavista väittämistä ovat totta:

   a) Kahden samankokoisen säännöllisen matriisin erotus on säännöllinen.

   b) Kahden singulaarisen matriisin lineaarikombinaatio ei voi olla säännöllinen.

   c) Jos matriisi on singulaarinen, niin myös sen liittomatriisi on singulaarinen.

   d) Jos A on reaalinen $n\times n$-matriisi ja α skalaari, niin $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

5. Olkoot E_1, E_2 ja E_3 kokoa 3×3 olevia tyypin I, II, ja III alkeismatriiseja tässä järjestyksessä ja olkoon E_2 saatu yksikkömatriisista kertomalla sen toinen rivi luvulla $a \neq 0$. Olkoon edelleen säännöllisen 3×3-matriisin A determinantti d. Laske seuraavien matriisien determinantit:

   a) E_1A, b) E_2A, c) E_3A, d) AE_1, e) $E_1^2A^2$, f) $A^{-1}E_2$, g) $E_1E_2E_3$.

6. Miten voidaan ratkaista *kerralla* kaikki yhtälöt $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ (ja ratkaise), kun

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

7. Ratkaise vielä yhtälöt $A\mathbf{x} = (A^{-1} - I)A\mathbf{b}_i$ (ks. tehtävä 6).

8. Olkoon V sellaisten tason vektorien joukko, joiden molemmat koordinaatit ovat ei-negatiivisia. Määritellään joukon V kaikille alkioille ja reaaliskalaareille laskusäännöt $\oplus$ ja $\cdot$ seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} |\alpha| x_1 \\ |\alpha| x_2 \end{pmatrix}$$

   a) Esitä laskutoimitukset kuvioina ja sanallisesti.

   b) Selvitä tarkasti, mitkä lineaariavaruuden aksioomat ovat näille voimassa.

9. Joukko $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ varustettuna tavallisella funktioiden yhteenlaskulla ja skalaarilla kertomisella on reaalikertoiminen lineaariavaruus (Esimerkki 9.3.6). Osoita, että kaikkien reaalikertoimisten polynomien joukko $\mathcal{P} := \cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}_n$ on myös reaalikertoiminen lineaariavaruus, jonka aliavaruuksia ovat kaikki joukot $\mathcal{P}_n$.