
Lineaarialgebra b, kevät 2019

Harjoitus 2 (tiistai 2.4. klo 12-14 ja 15-17 MP103)

Huomaa, että demot ovat mikroluokassa. Tehtäviä 1 ja 2 täydennettäneen vakuuttautumalla Maplen avulla, että myös aksioomat A5 ja A6 toteutuvat!

1. Olkoon $c > 0$ vakio ja olkoot \mathbf{u} ja \mathbf{v} välillä $A :=]-c, c[$. Määritellään \circ :

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} := \frac{\mathbf{u} + \mathbf{v}}{1 + \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}}{c^2}}.$$

Osoita, että (A, \circ) on Abelin ryhmä joukossa A .

2. Osoita, että seuraava ehdokas reaaliluvulla ”kertomiseksi” toteuttaa lineaariavaruuden aksioomat A7 ja A8 edellisen tehtävän joukossa A :

$$a \star \mathbf{u} := c \tanh \left(a \operatorname{ar} \tanh \left(\frac{\mathbf{u}}{c} \right) \right).$$

3. Tarkastellaan matriiseja

$$X := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, Y := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, Z := \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, U := \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}.$$

Virittääkö joukko $\{X, Y, Z, U\}$ reaalikertoimisen lineaariavaruuden $\mathbb{R}^{2 \times 2}$?

Opastus. Ota mielivaltainen 2×2 -matriisi, ja tutki voidaanko se esittää annettujen matriisien lineaarikombinaationa.

4. Tutki voidaanko jokin edellisen tehtävän matriiseista esittää muiden lineaarikombinaationa.

5. Olkoon $U := \{1+x, 1-x, x^2-2x\}$.

a) Osoita, että U on lineaarisesti riippumaton ja $[U] = \mathcal{P}_2$.

b) Esitä polynomi $2x^2 - 4x - 3$ joukon U alkioiden lineaarikombinaationa.

6. Olkoot

$$f_1(x) := 1, f_2(x) := \frac{1}{x}, f_3(x) := \frac{1}{x^2}, f_4(x) := \frac{1}{x^3}.$$

a) Valitse jokin sopiva reaalikertoiminen lineaariavaruus $(V, +, \cdot)$, jonka osajoukkona voidaan pitää funktiojoukkoa $U := \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$.

b) Osoita, että vektorijoukko U on lineaarisesti riippumaton.

c) Kuuluvatko funktiot u ja v

$$u(x) := \frac{1}{x^2}(x^2 + 1), \quad v = f_2 f_4$$

joukon U virittämään aliavaruuteen?

7. Selvitä kannan määritelmää käyttäen, onko joukko

$$\text{a) } U := \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{b) } V := \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

lineaariavaruuden \mathbb{R}^3 kanta. Monellako eri tavalla vektori $(1 \ 3 \ 5)^T$ voidaan esittää kyseisten joukkojen lineaarikombinaationa?