Lineaarialgebra b, kevät 2019
Harjoitus 4 (16.4., tiistai 12-14 ja 15-17 M106) korjattu versio 15.4.2019

Pääsiäislomamme on kokonaisen viikon to 18.4. – ke 24.4.2019. Samoin kurssin demoja ei pidetä vappuviikolla. Demot 5 ovat vasta vapun jälkeen ti 7.5. ja demot 6 ovat ti 14.5. Demot 7 ovat maanantaina 20.5. ja tiistaina 21.5. klo 12-14 M106.
Moodlessa avautuu lähipäivinä harjoiteltavaksi "Lineaariavaruus ja kanta", siitä sähköpostilla.

1. Mitkä seuraavista ovat lineaarikuvauksia (α vakio):

   a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}$, b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha \\ -x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha \end{pmatrix}$,

   c) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 + 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, d) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 - x_1 - 4x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.

   Kuvaa geometrisesti kohdan a) kuvauksen vaikutusta.

2. Olkoot $L : U \to V$ ja $M : V \to W$ lineaarikuvauksia. Osoita, että yhdistetty kuvaus $M \circ L : U \to W$ on lineaarinen (Lause 15.2.1).

3. Olkoon V lineaariavaruus ja $L : V \to V$ lineaarikuvaus. Määritellään induktiivisesti kuvauksen "potenssi"
$$\begin{aligned} L^1 &:= L \\ L^{k+1} &:= L \circ L^k \quad \text{arvoilla} \quad k \geq 1. \end{aligned}$$
   Osoita induktiolla, että kuvaus L^n on lineaarinen jokaisella $n \in \mathbb{N}$.

4. Todista Lauseen 15.2.8 kohta b): Olkoon $L : V \to W$ lineaarikuvaus ja $U = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k\} \subseteq V$. Osoita, että jos L on injektio ja U on lineaarisesti riippumaton, on $L(U)$ lineaarisesti riippumaton.

5. Valitse säännölle L,
$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 \\ x_1 + 7x_2 - x_4 \end{pmatrix},$$
   sopiva lähtöjoukko ja maalijoukko niin, että syntyy lineaarikuvaus. Määritä sen ytimen ja kuva-avaruuden dimensiot. Onko L injektio, surjektio tai jopa bijektio?

6. Määritä lineaarikuvausten $M : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ja $N : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5$ matriisit sekä yhdistetyn kuvauksen $N \circ M$ matriisi, kun
$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \\ -x_1 - 2x_3 \\ x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}, \quad N\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_3 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 5x_3 \end{pmatrix}$$

7. Selvitä tehtävän 6 kuvauksista M ja N:

   a) onko injektio? b) onko bijektio? c) käänteiskuvauksen matriisi.