Lineaarialgebra b, kevät 2019
Harjoitus 5 (7.5., tiistai 12-14 ja 15-17 M106)
Luentoja on vielä ainakin torstaina 25.4., to 2.5., ke 8.5. ja to 9.5.
Lisää tietoa kurssin loppupuolen ohjelmasta ja kokeesta on kääntöpuolella.

Mekaanisten laskujen laskemiseen saa käyttää konevoimaa, mutta ratkaisussa tulee kuitenkin olla riittävän tarkka jäsennys, jotta muut voivat seurata juonta helposti.
Olkoon tehtävien 1-2 kuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ määritelty kaavalla

$$L\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 3u_2 + 2(u_1 - 4u_2)x - (u_1 + 2u_3)x^2.$$

1. Osoita yo. L lineaariseksi ja selvitä, onko se bijektio.

2. Määritä yo. kuvauksen L matriisi A_L luonnollisten kantojen suhteen ja laske matriisin A_L avulla $L((6\ \ 2\ \ 3)^T)$.

3. Olkoot

$$\mathbf{u}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_1 := \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 := \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

   Todenna joukot $U := \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ ja $V := \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ avaruuden $\mathbb{R}^3$ kannoiksi.

   a) Määritä siirtomatriisi kannasta U kantaan V.

   b) Määritä vektorin $\mathbf{x} := \mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - 3\mathbf{u}_3$ koordinaatit kannassa V.

4. Polynomijoukko $F := \{\, 1 + x,\ x,\ x^2 - 1,\ x^3 + x \,\}$ on Esimerkin 12.1.5 mukaan avaruuden $\mathcal{P}_3$ kanta. Määritä siirtomatriisi S_{EF} luonnollisesta kannasta $E := \{\, 1,\ x,\ x^2,\ x^3 \,\}$ kantaan F. Mikä on toisaalta S_{FE} ?

5. Määritellään enintään astetta 2 olevien reaalipolynomien reaalikertoimisessa lineaariavaruudessa $\mathcal{P}_2$ kahden muuttujan funktio

$$\langle p, q \rangle := p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2).$$

   Osoita, että $(\mathcal{P}_2,\ +,\ \langle\ ,\ \rangle)$ on sisätuloavaruus.
   Vihje: Osoitahan ensin, että $(p, q) \mapsto \langle p, q \rangle$ on oikean tyyppinen funktio. Ehkä hankalinta on sitten keksiä miksi oletuksesta $\langle p, p \rangle = 0$ seuraa $p = \hat{0}$.

6. Osoita, että sisätuloavaruudessa pätee "toinen" kolmioepäyhtälö $|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|| \leq \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|$ (Lauseen 18.2.7 kohta d).
   Vihje: Aloita osoittamalla, että $\|\mathbf{u}\| \leq \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|$.

7. Osoita, että reaalisessa sisätuloavaruudessa pätee

   a) $\|3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}\| \leq 4\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| + \|\mathbf{u}\|$

   b) $\|3\mathbf{u} - 4\mathbf{v}\| \leq 3\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|$

8. Osoita, että reaalisessa sisätuloavaruudessa pätee

$$|\,\langle 3\mathbf{u}-4\mathbf{v}, 4\mathbf{u}-3\mathbf{v}\rangle\,| \leq 12(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2) + 25\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$$

Lopunajan ohjelmasta

Luennot jatkuvat torstaihin 9.5.2019 saakka, ellei toisin sovita. Demot 5 ovat vasta vapun jälkeen ti 7.5., demot 6 ti 14.5. Demot 7 ovat maanantaina 20.5. ja tiistaina 21.5. klo 12-14 M106.
Moodlessa on auki ”Lineaariavaruus ja kanta -harjoittelu” 30.4. klo 22 saakka. Sitten avautuu osakoe 1. Kurssikokeeseen keskiviikkona 22.5.2019 klo 14-16 M101 pitäisi osata kurssin luennoilla ja demoissa 1 - 7 läpikäydyt asiat, erityisesti monisteen Luvuissa 11 - 18, 19.1-3, 20, 23 - 25 ja 26.1-2 esitellyt käsitteet ja menetelmät (mikäli ei tule vielä tarkennuksia).

Lineaarialgebran kertaustehtäviä b – ratkaisut tulevat nettiin.

---

1. Määritä jokin kanta sille reaalikertoimisten polynomien lineaariavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruudelle, jonka virittää polynomijoukko $\{x^2-1, x+1, x^2-x-2\}$.

2. Määritä matriisin
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
a) nolla-avaruus ja sille kanta.
b) sarakeavaruus ja sille kanta.
c) aste ja mahdollisimman monta lineaarisesti riippumatonta matriisin A sarakevektoria.

3. Kuuluuko vektori
a) $\mathbf{a} := (1\ \ 2\ \ 3)^T$
b) $\mathbf{b} := (20\ \ 10\ \ 5)^T$
tehtävän 2 matriisin A sarakeavaruuteen?

4. Tarkastellaan edelleen tehtävän 2 matriisia A, tällä kertaa sen määräämää lineaarikuvausta $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$.
a) Mitä kaikkea kuvautuu vektorille $\mathbf{b} = (20\ 10\ 5)^T$?
b) Onko L injektio, surjektio, bijektio?

5. Osoita, että funktiojoukko $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muodostaa sisätuloavaruuden, kun sisätulona on operaatio
$$\langle f, g\rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

6. Minkä suuntaiset vektorit eivät muuta suuntaa kuvauksessa L, $L(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$, kun matriisi A on edelleen sama kuin tehtävässä 2 ?

7. Symmetrisoi tuttu tehtävän 2 matriisi A ja määritä vastaavan neliömuodon tyyppi.

8. Keksitkö suoran menetelmän tehtävän 7 neliömuodon tyypin selvittämiseksi määritelmän avulla?

9. Millä arvoilla $c \in \mathbb{R}$ ovat matriisin
$$B := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
ominaisarvot ja -vektorit reaalisia?

10. Osoita, että matriisi
$$M := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
on diagonalisoituva ja muodosta avaruudelle $\mathbb{R}^3$ matriisin M ominaisvektoreista koostuva kanta.