

Luentoja on vielä ke ja to 15. ja 16.5.

Moodlessa ”Lineaariavaruus ja kanta”-osakoe avautui viikoksi torstaina 9.5.2019. Salasana on lähetetty sähköpostissa.

Tehtävissä 6-7 saa ”mekaaniset” laskuoperaatiot laskea konevoimalla, mutta välituloksin niin, että niistä voi tehdä esityksen toistenkin nähtäväksi.

1. Laske seuraavien vektorien väliset kulmat:

a) $(3 \ -1)^T$ ja $(2 \ 7)^T$ avaruudessa \mathbb{R}^2 ,

b) $(-3 \ 4 \ 2)^T$ ja $(1 \ 3 \ 4)^T$ avaruudessa \mathbb{R}^3 ,

c) f ja $g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $f(x) := 2x$, $g(x) := x^2$, integraalिसätulon suhteen (ks. Esimerkki 18.1.6).

2. Mitkä seuraavista tason joukoista ovat ortogonaalisia, mitkä jopa ortonormaaleja:

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad B := \left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad C := \left\{ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} \right\}?$$

3. Määritä aluksi luku a niin, että vektorit $(4 \ 3 \ 5)^T$ ja $(a \ -2 \ 1)^T$ ovat ortogonaaliset. Muodosta sitten näiden avulla avaruudelle \mathbb{R}^3 ortonormaali kanta.

Vihje: Montako vektoria siinä pitää olla?

4. Laske seuraavista vektoripareista ensimmäisen vektoriprojektio ja ortogonaalikomponentti jälkimmäiselle vektorille:

a) $\mathbf{x} := (2 \ 4)^T$ ja $\mathbf{y} := (6 \ 5)^T$ avaruudessa \mathbb{R}^2 ,

b) $\mathbf{x} := (3 \ -5 \ 1)^T$ ja $\mathbf{y} := (6 \ 1 \ -3)^T$ avaruudessa \mathbb{R}^3 ,

c) f ja $g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $f(x) := x^2$, $g(x) := 4x + 1$, integraalिसätulon suhteen.

5. Määritä Gramm-Schmidt -menetelmällä ortonormaali kanta avaruuden \mathbb{R}^3 tasolle, jonka virittää vektorijoukko

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}.$$

6. Määritä pienimmän neliösumman ratkaisut seuraaville (ilmeisen yhtäpitäville) yhtälöryhmille:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -6 \\ 3x_1 - 2x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} 20000x_1 - 30000x_2 = -60000 \\ 3x_1 - 2x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = -3 \end{cases}$$

Piirrä yhtälöitä vastaavat suorat ja PNS-ratkaisut x_1x_2 -koordinaatistoon. Laske myös residuaalien arvot.

7. Sovita pienimmän neliösumman mukainen suora xy -tason pistejoukkoon, kun on (ainakin leikisti) saatu mittaustulokset:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x & -3 & 0 & 2 & 6 \\ \hline y & -1 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

Piirrä pisteet ja suora koordinaatistoon. Laske residuaalin arvo.