Lineaarialgebran kertaustehtäviä a

1. Ovatko yhtälöryhmät

$$\text{a)}\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ x_2 = 3 \\ 2x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{ja b)}\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2 \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

   ekvivalentteja?

2. Miten arvelet menetellyn seuraavassa laskussa:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2} \\ -2z = 1 \\ -y + 3z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -\frac{1}{2} \\ z = -\frac{1}{2} \end{cases} ?$$

   Mistä virhe johtuu?

3. Olkoot $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ja $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mielivaltaiset. Osoita, että matriisi $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ on symmetrinen.

4. Mitkä seuraavista väittämistä ovat totta:

   a) Kahden samankokoisen säännöllisen matriisin erotus on säännöllinen.

   b) Kahden singulaarisen matriisin lineaarikombinaatio ei voi olla säännöllinen.

   c) Jos matriisi on singulaarinen, niin myös sen liittomatriisi on singulaarinen.

   d) Jos A on reaalinen $n\times n$-matriisi ja α skalaari, niin $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

5. Olkoot E_1, E_2 ja E_3 kokoa 3×3 olevia tyypin I, II, ja III alkeismatriiseja tässä järjestyksessä ja olkoon E_2 saatu yksikkömatriisista kertomalla sen toinen rivi luvulla $a \neq 0$. Olkoon edelleen säännöllisen 3×3-matriisin A determinantti d. Laske seuraavien matriisien determinantit:

   a) E_1A, b) E_2A, c) E_3A, d) AE_1, e) $E_1^2A^2$, f) $A^{-1}E_2$, g) $E_1E_2E_3$.

6. Miten voidaan ratkaista *kerralla* kaikki yhtälöt $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_i$ (ja ratkaise), kun

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_2 := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},\ \mathbf{b}_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

7. Ratkaise vielä yhtälöt $A\mathbf{x} = (A^{-1} - I)A\mathbf{b}_i$ (ks. tehtävä 6).

8. Olkoon V sellaisten tason vektorien joukko, joiden molemmat koordinaatit ovat ei-negatiivisia. Määritellään joukon V kaikille alkioille ja reaaliskalaareille laskusäännöt $\oplus$ ja $\cdot$ seuraavasti:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} |\alpha|x_1 \\ |\alpha|x_2 \end{pmatrix}$$

   a) Esitä laskutoimitukset kuvioina ja sanallisesti.

   b) Selvitä tarkasti, mitkä lineaariavaruuden aksioomat ovat näille voimassa.

9. Joukko $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ varustettuna tavallisella funktioiden yhteenlaskulla ja skalaarilla kertomisella on reaalikertoiminen lineaariavaruus (Esimerkki 9.3.6). Osoita, että kaikkien reaalikertoimisten polynomien joukko $\mathcal{P} := \cup_{n=0}^{\infty}\mathcal{P}_n$ on myös reaalikertoiminen lineaariavaruus, jonka aliavaruuksia ovat kaikki joukot $\mathcal{P}_n$.