Lineaarialgebran kertaustehtävien a ratkaisuista

1. Yhtälöryhmät ovat ekvivalentteja. Perustelu saadaan joko
a) käyttämällä sopivasti alkeisoperaatioita tai
b) toteamalla, että yhtälöryhmät ovat lineaarisia, niillä on samat tuntemattomat ja niillä on sama ratkaisuvektori $(-2\ 3\ 2)^T$.
2. Kokeilemalla nähdään ratkaisu vääräksi, ratkaisuja olisi liikaakin.
Merkitsemällä käytetyt operaatiot näkyviin selvinnee syykin. Oikea ratkaisu on

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. Jekku: tulohan tuottaa 1×1-matriisin, joka tietysti on symmetrinen.
4. Kohta a): epätosi, vrt. tehtävä 7d/demo 7.
Kohta b): epätosi, vrt. a) ja tehtävä 7a/demo 7.
Kohta c): tosi. Seuraa vaikkapa epäsuorasti yhtälöstä $A\,\mathrm{adj}(A) = \det(A)\,I$.
Kohta d): tosi. Matriisin αA kustakin n sarakkeesta saadaan determinantin eteen kertoimeksi yksi α.
5. a) $\det(E_1 A) = -d$
b) $\det(E_2 A) = ad$
c) $\det(E_3 A) = d$
d) $\det(AE_1) = -d$
e) $\det(E_1^2 A^2) = d^2$
f) $\det(A^{-1}E_2) = a/d$
g) $\det(E_1 E_2 E_3) = -a$.
6. Kirjoitetaan vektorit $\mathbf{b}_i$ matriisin B sarakkeiksi ja ratkaistaan matriisiyhtälö:

$$AX = B \iff X = A^{-1}B.$$

Ratkaisut ovat matriisin

$$X = \frac{1}{109}\begin{pmatrix} -39 & 238 & 160 & 133 \\ 88 & -6 & -48 & -29 \\ -16 & 11 & -21 & 35 \end{pmatrix}$$

sarakkeina $\mathbf{x}_i$ samassa järjestyksessä kuin vektorit $\mathbf{b}_i$ olivat matriisissa B, siis esimerkiksi

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{109}\begin{pmatrix} -39 \\ 88 \\ -16 \end{pmatrix}$$

7. Kuten yllä, ratkaistaan ja sievennetään saaden $X = (A^{-1} - I)B$ (mutta mitenkäpä se "laillisesti" tehdään?). Siis esimerkiksi
$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{109}(-257\ \ -457\ \ 93)^T$.
8. a) Luovuutta!
b) Joukko $V = \{\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\,\}$ on tason epätyhjä osajoukko ja operaatiot $\oplus : V\times V \to V$ ja $\odot : \mathbb{R}\times V \to V$ ovat kelpoisia laskutoimituksiksi (i) ja (ii).
Kohta (iii): A1 ei voimassa, A2 on voimassa, A3, A4 ei voimassa, A5 on, A6 ei, A7-8 voimassa.
9. Lineaariavaruuden aksioomat käytävä läpi, periaatteessa. Mutta sehän käy melkein sanasta sanaan kuin Esimerkissä 9.3.6.!
Toinen tapa on näyttää $\mathcal{P}$ lineaariavaruuden $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ aliavaruudeksi.
$\mathcal{P}_n$ näytetään avaruuden $(\mathcal{P},+,\cdot)$ aliavaruudeksi määritelmän avulla.