**Lineaarialgebran kertaustehtäviä b**

1. Määritä jokin kanta sille reaalikertoimisten polynomien lineaariavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruudelle, jonka virittää polynomijoukko $\{x^2-1, x+1, x^2-x-2\}$.

2. Määritä matriisin
$$A := \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
a) nolla-avaruus ja sille kanta.

   b) sarakeavaruus ja sille kanta.

   c) aste ja mahdollisimman monta lineaarisesti riippumatonta matriisin $A$ sarakevektoria.

3. Kuuluuko vektori

   a) $\mathbf{a} := (1\ \ 2\ \ 3)^T$

   b) $\mathbf{b} := (20\ \ 10\ \ 5)^T$

   tehtävän 2 matriisin $A$ sarakeavaruuteen?

4. Tarkastellaan edelleen tehtävän 2 matriisia $A$, tällä kertaa sen määräämää lineaarikuvausta $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$.

   a) Mitä kaikkea kuvautuu vektorille $\mathbf{b} = (20\ 10\ 5)^T$?

   b) Onko $L$ injektio, surjektio, bijektio?

5. Osoita, että funktiojoukko $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muodostaa sisätuloavaruuden, kun sisätulona on operaatio
$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

6. Minkä suuntaiset vektorit eivät muuta suuntaa kuvauksessa $L$, $L(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$, kun matriisi $A$ on edelleen sama kuin tehtävässä 2 ?

7. Symmetrisoi tuttu tehtävän 2 matriisi $A$ ja määritä vastaavan neliömuodon tyyppi.

8. Keksitkö suoran menetelmän tehtävän 7 neliömuodon tyypin selvittämiseksi määritelmän avulla?

9. Millä arvoilla $c \in \mathbb{R}$ ovat matriisin
$$B := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$
ominaisarvot ja -vektorit reaalisia?

10. Osoita, että matriisi
$$M := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$
on diagonalisoituva ja muodosta avaruudelle $\mathbb{R}^3$ matriisin $M$ ominaisvektoreista koostuva kanta.