Lineaarialgebran kertaustehtävien b ratkaisuista

1. Määritä jokin kanta sille reaalikertoimisten polynomien lineaariavaruuden $\mathcal{P}$ aliavaruudelle, jonka virittää polynomijoukko $\{x^2-1, x+1, x^2-x-2\}$.

   Ratkaisu. Olkoon $W := [x^2-1, x+1, x^2-x-2]$.

   I tapa (hoksaamalla). Kolmas polynomi on kahden ensimmäisen erotuksena viritysmielessä turha, joten $W = [x^2-1, x+1]$. Nämä kaksi virittäjää ovat lineaarisesti riippumattomia, joten ne ovat eräs kanta.

   II tapa (laskemalla). Koska $W \subseteq \mathcal{P}_2$, on selvästikin $1 \leq \dim W \leq 3$; dimensio on siis 1, 2 tai 3.

   Muodostetaan lineaarikombinaatio ja merkitään nollaksi:

$$a(x^2-1) + b(x+1) + c(x^2-x-2) = \hat{0}.$$

   Tämä on mahdollista jos ja vain jos

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & 2c & = & 0 \\ & & b & - & c & = & 0 \\ a & & & + & c & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} a & - & b & + & 2c & = & 0 \\ & & b & - & c & = & 0 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

   Tässä on yksi vapaasti valittava parametri, esimerkiksi $c = t \in \mathbb{R}$, eli on muitakin kuin vain triviaaliratkaisu. Siten joukko W on lineaarisesti riippuva ja siten $1 \leq \dim W \leq 2$. Koska selvästikin kaksi ensimmäistä polynomia x^2-1 ja $x+1$ ovat lineaarisesti riippumattomia, on $\dim W = 2$ ja $\{x^2-1, x+1\}$ on eräs kanta.

   Päättelyn voisi aloittaa myös edellisen loppupuolelta ja näyttää kuten alkupuolella, että välttämättä $\dim W < 3$.

2. Määritä matriisin

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

   a) nolla-avaruus ja sille kanta.

   b) sarakeavaruus ja sille kanta.

   c) aste ja mahdollisimman monta lineaarisesti riippumatonta matriisin A sarakevektoria.

   Ratkaisu. Muunnetaan A porrasmuotoon:

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{array} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1' \leftarrow \frac{1}{2}R_1 \\ R_2' \leftarrow R_2 - \frac{1}{2}R_1 \\ R_3' \leftarrow R_3 + \frac{1}{2}R_1 \end{array}$$
$$\simeq \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} R_1'' \leftarrow R_1' \\ R_2'' \leftarrow \frac{1}{5}R_3' \\ R_3'' \leftarrow R_2' \end{array}$$

   a) Mitä kuvautuu nollalle $\mathbf{0}_{\mathbb{R}^3}$ kuvauksessa $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$?

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}_{\mathbb{R}^3} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 8 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & 2t \\ x_2 & = & -t \\ x_3 & = & t,\ t \in \mathbb{R}. \end{array}\right.$$

Nolla-avaruus on siis

$$N(A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \text{ ja eräs kanta } \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

b) Eräs sarakeavaruuden kanta saadaan matriisin A porrasmuodossa olevien johtavien ykkösten määräämistä sarakkeista:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Itse sarakeavaruus on näiden kantavektorien virittämä lineaariavaruuden $\mathbb{R}^3$ aliavaruus

$$[A]_s = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left\{ s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

c) Porrasmuodosta voitiin päätellä, että aste $r(A) = \dim[A]_r = 2$. Koska myös $\dim[A]_s = 2$, maksimimäärä lineaarisesti riippumattomia matriisin A sarakkeita on 2, ja porrasmuodon mukaan näitä ovat ainakin 1. ja 2. sarakkeen vektorit.

3. Kuuluuko vektori

a) $\mathbf{a} := (1\ 2\ 3)^T$

b) $\mathbf{b} := (20\ 10\ 5)^T$

tehtävän 2 matriisin A sarakeavaruuteen?

Ratkaisu. Voidaan tehdä ainakin kahdella tavalla:

1) Koettamalla ratkaista yhtälöt $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ ja $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$; vastaus on myönteinen mikäli yhtälö on ratkeava. Yleinen metodi.

2) Sarakeavaruuden kannan avulla; vastaus on myönteinen mikäli vektorilla on esitys ko. kannassa. Onnistuu vasta kun sarakeavaruuden jokin kanta on selvillä.

a) Selvitetään tulos tehtävässä 2 lasketun kannan avulla.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\alpha_1 & + & 8\alpha_2 & = & 1 \\ \alpha_1 & + & 4\alpha_2 & = & 2 \\ -\alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\alpha_1 & + & 8\alpha_2 & = & 1 \\ & & 5\alpha_2 & = & \frac{7}{2} \\ & & 0 & = & \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua, joten $\mathbf{a}$ ei kuulu sarakeavaruuteen.

b) Samoin kannan avulla:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\alpha_1 & + & 8\alpha_2 & = & 20 \\ \alpha_1 & + & 4\alpha_2 & = & 10 \\ -\alpha_1 & + & \alpha_2 & = & 5 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcr} 2\alpha_1 & + & 8\alpha_2 & = & 20 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 5\alpha_2 & = & 15 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcr} \alpha_1 & = & -2 \\ \alpha_2 & = & 3 \end{array} \right.$$

Siispä $\mathbf{b}$ kuuluu matriisin A sarakeavaruuteen.

Esitetään kohdalle b) myös suora (ja alkeellisin) ratkaisutapa 1).

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 8 & 4 & 20 \\ 1 & 4 & 2 & 10 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 15 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Tällä yhtälöryhmällä on selvästikin ratkaisuja, joten $\mathbf{b} = (20\ 10\ 5)^T \in [A]_s$.

4. Tarkastellaan edelleen tehtävän 2 matriisia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

tällä kertaa sen määräämää lineaarikuvausta $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $L(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$.

a) Mitä kaikkea kuvautuu vektorille $\mathbf{b} = (20\ 10\ 5)^T$?

b) Onko L injektio, surjektio, bijektio?

Ratkaisu. a) Voimme jatkaa tehtävän 3 b) loppuosan tarkastelusta:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \iff \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 4 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \begin{cases} x_1 &= -2 + 2t \\ x_2 &= 3 - t \\ x_3 &= t,\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Täten kaikki vektorit

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -2 + 2t \\ 3 - t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

kuvautuvat vektorille $\mathbf{b} = (20\ 10\ 5)^T$, siis kokonainen suora.

b) Kysyttyjen asioiden selvittämiseksi on useita erilaisia tapoja. Voimme halutessamme käyttää apuna tehtävien 2 ja 3 tuloksia.

I tapa (alkeellisin): Koska kohdassa a) näimme, että vektorille $\mathbf{b} = (20\ 10\ 5)^T$ kuvautuu jopa äärettömän monta vektoria, ei kuvaus ole injektio, eikä siten bijektiokaan.

Toisaalta näytimme tehtävässä 3 a), että vektorille $\mathbf{a} = (1\ 2\ 3)^T$ ei kuvaudu mitään. Täten kuvaus L ei ole surjektio, eikä siten bijektiokaan.

Kuvauksella L ei näin ollen ole mitään kysytyistä ominaisuuksista.

II tapa (ytimen avulla): Kuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on matriisin A määräämänä lineaarinen. Tehtävässä 2 a) muodostettiin sen ydin

$$\ker(L) = N(A) = \left\{ t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \, t \in \mathbb{R} \right\} \neq \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Koska ydin ei muodostu pelkästä lähtöavaruuden nollavektorista, ei L ole injektio, eikä siten myöskään bijektio.

Koska kuvauksen $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lähtö- ja maaliavaruudet ovat samaa äärellistä dimensiota, ei L voi olla surjektio eikä bijektio.

III tapa (kuva-avaruuden dimensio): Kuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on matriisin A määräämänä lineaarinen. Lineaarikuvauksen kuva-avaruus on sama kuin sen matriisin sarakeavaruus, $L(\mathbb{R}^3) = [A]_s$, joten tehtävän 1 mukaan

$$\dim L(\mathbb{R}^3) = \dim[A]_s = 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Kuva-avaruus on siis alempaa astetta kuin lähtöavaruus $\mathbb{R}^3$, joten L ei voi olla injektio.

Koska lähtö- ja maaliavaruudet ovat samaa äärellistä dimensiota, ei L voi olla myöskään surjektio eikä bijektio.

IV tapa (singulaarisuus): Kuvaus $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ on matriisin A määräämänä lineaarinen. Koska sen matriisi A on neliömatriisi ja

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ei A ole säännöllinen eikä kuvaus $L : \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ siten ole bijektio.

Koska kuvauksen $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lähtö- ja maaliavaruudet ovat samaa äärellistä dimensiota, ei L voi olla myöskään injektio eikä surjektio.

5. Osoita, että funktiojoukko $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muodostaa sisätuloavaruuden, kun sisätulona on operaatio

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

Ratkaisu. Ensinnäkin, kolmikko $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), +, \cdot)$ varustettuna normaaleilla funktioiden yhteenlaskulla ja skaalauksella (skalaarilla kertomisella) on tunnetusti reaalikertoiminen lineaariavaruus.

Lopuille vaatimuksille tarvitsemme differentiaalilaskennan tuloksia. Minkä hyvänsä kahden välillä $[0,1]$ jatkuvan funktion tulo fg on jatkuva ja siten integroituva. Operaatio $\langle , \rangle$ on siten funktio $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.

(i) $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(t)^2\,dt \geq 0$ on selvä.

Oletetaan, että $\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(t)^2\,dt = 0$. Pitää osoittaa, että $f = 0$ välillä $[0,1]$.

Antiteesi: Oletetaan, että $f(x_0) \neq 0$ jollekin $x_0 \in [0,1]$. Silloin $f(x_0)^2 > 0$. Jatkuvuuden nojalla olisi olemassa osaväli $[a,b] \subseteq [0,1]$ jolla $f^2 > 0$. Mutta silloin olisikin

$$\langle f, f \rangle = \int_0^1 f(t)^2\,dt > 0,$$

mikä olisi ristiriita. Siis on oltava $f^2 = 0$ ja siten myös $f = 0$ välillä $[0,1]$.

(ii) Kaikilla $f, g \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ on

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(t)g(t)\,dt = \int_0^1 g(t)f(t)\,dt = \langle g, f \rangle\,.$$

(iii) Kaikilla $a, b \in \mathbb{R}$ ja $f, g, h \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ on

$$\begin{aligned}
\langle af + bg, h \rangle &= \int_0^1 (af(t) + bg(t))h(t)\,dt \\
&= \int_0^1 (af(t)h(t) + bg(t)h(t))\,dt \\
&= a\int_0^1 f(t)h(t)\,dt + b\int_0^1 g(t)h(t)\,dt \\
&= a\,\langle f, h \rangle + b\,\langle g, h \rangle\,.
\end{aligned}$$

6. Minkä suuntaiset vektorit eivät muuta suuntaa kuvauksessa L, $L(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$, kun matriisi A on edelleen sama kuin tehtävässä 2 ?

   Ratkaisu. Mille vektoreille on siis $L(\mathbf{x}) = \lambda\mathbf{x}$ jollakin skalaarilla $\lambda \in \mathbb{R}$?

   Tietysti ainakin nollavektori toteuttaa yhtälön, olipa skalaari λ mikä hyvänsä.

   Nollasta poikkeavat vektorit saadaan ratkaisemalla yhtälö

$$L(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} = (\lambda I)\mathbf{x}$$

   eli $(A - \lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Tällä on nollasta poikkeavia ratkaisuja vain kun neliömatriisi $A - \lambda I$ on singulaarinen, eli kun sen determinantti on 0:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 & 4 \\ 1 & 4-\lambda & 2 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 20\lambda \\
&= -\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 20) = 0 \\
\iff & \lambda = 0 \quad \text{tai} \quad \lambda = \tfrac{9 \pm \sqrt{81-80}}{2} = \tfrac{9 \pm 1}{2}
\end{aligned}$$

   Ratkaistiin siis ensin matriisin A ominaisarvot $\lambda = 0$, $\lambda = 4$ ja $\lambda = 5$.

   Kun $\lambda = 0$, ominaisvektorit ovat

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

   Kun $\lambda = 4$, ominaisvektorit ovat

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

   Kun $\lambda = 5$, ominaisvektorit ovat

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \neq 0.$$

   Ominaisvektorien suuntaiset vektorit säilyttävät suuntansa.

   Erityisesti kaikkien vektorien

$$\mathbf{x} = t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}$$

   muodostama suora kuvautuu nollalle (vrt. tehtävän 2 nolla-avaruus!).

7. Symmetrisoi tuttu tehtävän 2 matriisi

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

ja määritä vastaavan neliömuodon tyyppi.

Ratkaisu. Jaetaan summat $a_{ij} + a_{ji}$ kahtia uuden matriisin $C = (c_{kl})$ alkioille c_{ij}, c_{ji}. Tällöin saamme symmetrisoidun matriisin

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} \\ 4\frac{1}{2} & 4 & 1\frac{1}{2} \\ 1\frac{1}{2} & 1\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix},$$

joka määrää saman neliömuodon kuin A:

$$P(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T A\mathbf{x} = \mathbf{x}^T C\mathbf{x} = 2x_1^2 + 9x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2^2 + 3x_2x_3 + 3x_3^2.$$

Neliömuodon tyyppi saadaan selville matriisin C ominaisarvoista, jotka tiedämme reaalisiksi. Ominaisarvoille saamme (vaikkapa Maplella) likiarvot $\lambda_1 = 2.19$, $\lambda_2 = 8.43$, $\lambda_3 = -1.62$.

Näissä on sekä positiivisia että negatiivisia, joten neliömuoto on indefiniitti.

8. Keksitkö suoran menetelmän tehtävän 7 neliömuodon tyypin selvittämiseksi määritelmän avulla?

Ratkaisu. Helposti nähdään, että

$$P\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -3, \quad P\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2,$$

joten P on indefiniitti.

9. Millä arvoilla $c \in \mathbb{R}$ ovat matriisin

$$B := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ominaisarvot ja -vektorit reaalisia?

Ratkaisu. Muodostetaan siis yhtälö $\det(A - \lambda I) = 0$:

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad ad - (a+d)\lambda + \lambda^2 - bc = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad \lambda = \tfrac{a+d}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a+d)^2 - 4(ad-bc)} \\
&\qquad\quad\;\; = \tfrac{a+d}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a-d)^2 + 4bc}
\end{aligned}$$

Reaalisuuden määrää diskriminantti: $\lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (a-d)^2 + 4bc \geq 0$, ja ominaisarvojen ollessa reaaliset myös ominaisvektorit ovat reaalisia. Sama pätee myös kääntäen.

10. Osoita, että matriisi

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

on diagonalisoituva ja muodosta avaruudelle $\mathbb{R}^3$ matriisin M ominaisvektoreista koostuva kanta.

Ratkaisu. Tämä matriisi M on diagonalisoituva jos ja vain jos sillä on kolme lineaarisesti riippumatonta ominaisvektoria. Yläkolmiomatriisin ominaisarvot ovat diagonaalilla ja $\lambda = 0$ on yksinkertainen, $\lambda = 2$ kaksinkertainen ominaisarvo.

Arvoa $\lambda = 0$ vastaavat ominaisvektorit $s(-2\ \ 1\ \ 0)^T$, $s \neq 0$.

Arvoa $\lambda = 2$ vastaavat mm. ominaisvektorit $t(1\ \ 0\ \ 0)^T$ ja $u(0\ \ 3\ \ 2)^T$, $t, u \neq 0$.

Helposti nähdään, että nämä kolme vektoria ovat lineaarisesti riippumattomia ominaisvektoreita, joten M on diagonalisoituva ja kyseessä avaruuden $\mathbb{R}$ kanta.